ВИХРИ НАД ВЗЛЕТНОЙ ПОЛОСОЙ

А. Стасенко

Ах, как хочется в небо, разбежавшись, ворваться,
Услышав команду: «Внимание, взлет!».
Из старой физтеховской песни

Однако разбегаться и врываться следует осторожно, особенно если перед вами взлетел тяжелый самолет. Может быть, вам приходилось видеть, как при резком взлете или посадке голубя на пыльной площадке в окружающем воздухе возникают видимые (за счет пыли) вихревые движения? Если нет – понаблюдайте . Точно так же и тяжелый самолет, отбрасывая вниз мощные потоки воздуха, порождает над аэродромом вихри – и горе легкому летательному аппарату, следующему за ним. Крылья легкого самолета могут попасть в вертикальные потоки воздуха с противоположно направленными скоростями, которые просто опрокинут его «на спину», а близость земли не позволит вновь выровняться. Увы, такие случаи были, так что вихри над взлетной полосой представляют интерес и для пилотов, и для авиадиспетчеров, и, конечно, для ученых-аэрогазодинамиков.

Попробуем и мы исследовать кинематику вихрей – конечно, в самой упрощенной форме.

Что такое вихрь? Его можно увидеть, например, при сливе воды через отверстие ванны или кухонной раковины. Если в воде содержится несколько чаинок, легко заметить, что линейная (окружная) скорость вихря тем больше, чем он ближе к оси вращения. В гидродинамике есть важное понятие потенциального вихря, в котором линейная скорость обратно пропорциональна расстоянию от оси: $V \sim 1/r$ (рис. 1). Эту же идею физики выражают еще так: произведение линейной скорости на длину окружности есть величина постоянная, называемая циркуляцией, т.е.

$$V \cdot 2\pi r = \Gamma \qquad (1)$$

(Кстати, таким же свойством обладает еще и магнитное поле.)

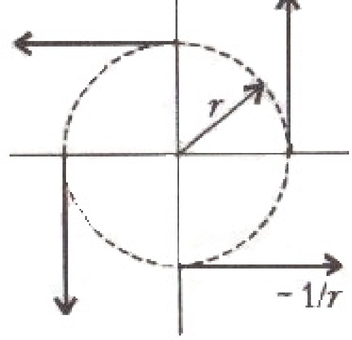

Рис. 1

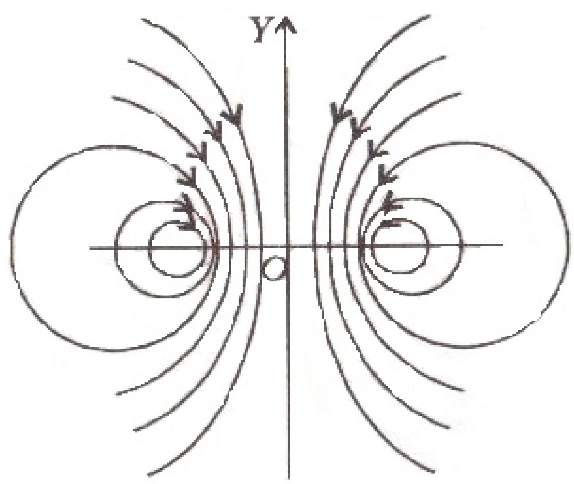

Рис. 2

Легко понять, что за самолетом обычно тянутся два вихря с противоположными направлениями вращения. Действительно, чтобы держаться в воздухе, крыло самолета должно отбрасывать вниз воздух, частицы которого затем расходятся в стороны и возвращаются сверху. В

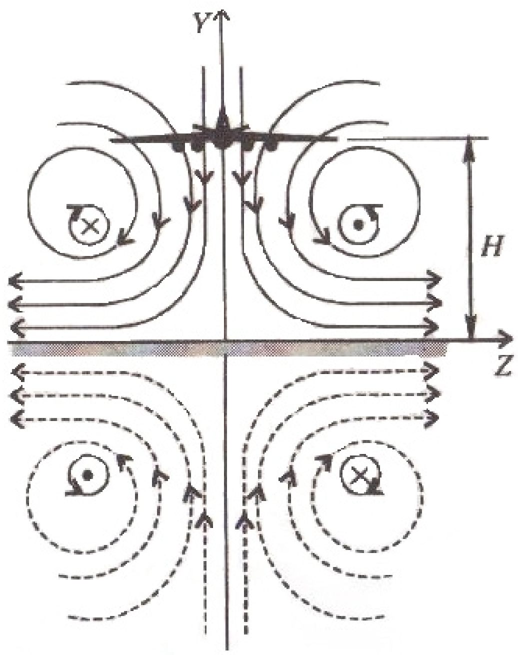

Рис. 3

результате перемещения самолета вперед эти частицы описывают спиралевидные траектории. Эти два вихря можно считать зеркальными изображениями друг друга относительно вертикальной плоскости симметрии самолета – ее проекция на плоскость рисунка есть ось OY (рис.2). Линии тока воздуха, порожденные правым и левым вихрями, скользят вдоль OY вниз. Таким образом, эта вертикальная плоскость симметрии является как бы непроницаемой перегородкой для вихрей. Пусть теперь самолет летит над аэродромом на небольшой высоте *H*. Земля-то уж точно непроницаема для движения воздуха, поэтому линии тока, порожденные двумя реальными вихрями, тоже будут скользить параллельно плоскости земли (рис. 3). Картина линий тока будет выглядеть так, как будто «под землей» есть еще пара вихрей, являющихся зеркальными отражениями двух реальных вихрей самолета относительно горизонтальной плоскости. (Из любви к аналогиям, свойственной физикам, напомним, что эта картина линии тока полностью совпадает с картиной линий магнитного поля, порожденной четырьмя параллельными друг другу проводами, в которых текут одинаковые по модулю электрические токи. Их направление показано условно на рисунке 3 точкой (если ток течет к нам) или крестиком (если от нас).)

Таким образом, можно считать, что каждый из четырех вихрей находится в суммарном поле трех других. Изучим движение одного из них, например вихря *1* (рис. 4). Положение его оси можно описать либо в обычной декартовой системе координат, либо в так называемой полярной системе, в которой задается расстояние ρ исследуемой точки от полюса *O* и угол φ (азимут) радиуса-вектора $\vec{\rho}$, например относительно оси *OY*. В последнем случае вектор скорости $\vec{V}$ будет иметь радиальную проекцию V_ρ и перпендикулярную вектору $\vec{\rho}$ (азимутальную) проекцию V_φ. Сначала рассмотрим скорости, порожденные каждым из трех вихрей в том месте, где проходит ось первого вихря. Согласно формуле (1), левый реальный вихрь (его номер 2) создает в точке *1* скорость, направленную вертикально вниз и равную

$$V^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2z} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho \sin\varphi}$$

(здесь учтено, что $z = \rho \cdot \sin\varphi$). Из прямоугольных треугольников на рисунке 4,а можно получить искомые

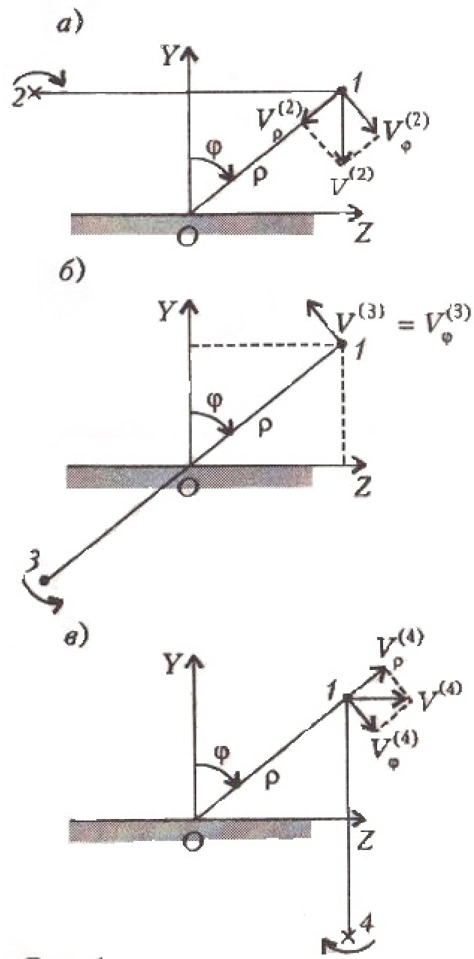

Рис. 4

проекции:

$$V_\rho^{(2)} = -V^{(2)} \cdot \cos\varphi = -\frac{\Gamma \cdot \cos\varphi}{2\pi \cdot 2\rho \cdot \sin\varphi}, \qquad V_\varphi^{(2)} = V^{(2)} \cdot \sin\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$


Самолётная турбуленция

Здесь знак «минус» указывает на то, что радиальная проекция вектора $\vec{V}^{(2)}$ направлена против радиуса-вектора. Скорость $V^{(3)}$, порожденная левым мнимым вихрем (номер *3*, см. рис.4,б), имеет только азимутальную составляющую

$$V_\varphi^{(3)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Наконец, скорость, порожденная правым мнимым вихрем (номер 4), имеет составляющие (см. рис.4,в)

$$V_\rho^{(4)} = \frac{\Gamma \cdot \sin\varphi}{2\pi \cdot 2\rho \cdot \cos\varphi}, \; V_\varphi^{(4)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Учтем теперь, что радиальная составляющая скорости вихря *1* равна быстроте изменения радиуса ρ по времени:

$$V_\rho = \frac{\Delta\rho}{\Delta t},$$

а азимутальная – быстроте изменения дуги $\rho \cdot \Delta\varphi$ со временем:

$$V_\varphi = \rho \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Приравняем эти выражения, соответственно, сумме радиальных и азимутальных составляющих скоростей от всех трех вихрей:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=\frac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}\cdot\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

$$\rho\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}. \qquad (2)$$

Таким образом, мы выписали кинематическую систему уравнений – математическую связь между пространственными и временной переменными.

Попробуем найти решение этой системы уравнений (ибо нет ничего недоступного для читателей «Кванта»). Например, если мы разделим почленно уравнения друг на друга, мы исключим время, и тогда останется связь только между радиальной координатой оси вихря и ее азимутом:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho\cdot\Delta\varphi}=\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}=-\frac{\cos 2\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}$$

(мы привели правую часть к общему знаменателю и использовали тригонометрические соотношения для синуса и косинуса двойного угла). Умножив обе части полученного равенства на $\Delta\varphi$, мы, как говорят математики, разделим переменные: слева все будет зависеть только от ρ, справа – только от φ:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\cos 2\varphi\cdot\Delta(2\varphi)}{\sin 2\varphi}=-\frac{\Delta(\sin 2\varphi)}{\sin 2\varphi}$$

(тут мы учли, что производная от синуса есть косинус). Ну а теперь простое интегрирование дает (соответствующий интеграл можно найти в таблицах)

$$\ln\frac{\rho}{\rho_*}=\ln\frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi}\text{, или }\frac{\rho}{\rho_*}=\frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi}$$

где ρ_* – значение радиуса при некотором конкретном угле φ_*. Видно, что радиус достигает минимального значения ρ_m при $\sin 2\varphi_*=1$, т.е. при $\varphi_*=\pi/4$. Поэтому запишем

$$\frac{\rho}{\rho_m}=\frac{1}{\sin 2\varphi} \qquad (3)$$

Теперь мы знаем, как выглядит проекция оси вихря на вертикальную плоскость. Так, ось симметрична относительно биссектрисы прямого угла *YOZ*. Далее, при $\varphi\to 0$ и $\varphi\to\pi/2$ модуль радиуса-вектора ρ стремится к бесконечности. Например, рассмотрим случай $\varphi\to 0$, $\rho\to\infty$ (самолет летит высоко над землей). Тогда из второго уравнения системы (2) следует, что азимутальная скорость стремится к нулю, а из первого уравнения видно, что имеется только вертикальная скорость $V_{y\infty}$, с которой оба реальных вихря опускаются за самолетом:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t}=-\frac{\Gamma\cdot\cos 2\varphi}{2\pi\cdot 2\rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}\text{, или }-\frac{\Gamma}{2\pi\cdot l}=V_{y\infty}$$

(так как $\rho \cdot \sin\varphi = l$, где *l* – расстояние между двумя вихрями). Подставив равенство (3) во второе уравнение системы (2), получим

$$\frac{\Delta(2\varphi)}{\sin^2 2\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_m^2}.$$

Мы записали уравнение с разделенными переменными – слева азимут оси вихря, справа – время. Интегрируя (опять же, например, при помощи таблицы интегралов), получим

$$\frac{\Gamma}{2\pi \cdot \rho_m^2} t = \frac{1}{tg 2\varphi_0} - \frac{1}{tg 2\varphi},$$

где угол φ_0 соответствует начальному моменту времени *t* = 0 (в который уже образовались вихри за самолетом). Как легко видеть из рисунка 4,а, $tg\varphi_0 = l/(2H)$, где *H* – высота полета. Таким образом, соотношения (3) и (4) полностью определяют положение осей вихрей в зависимости от времени.

Например, при $t \to \infty$ имеем $tg 2\varphi \to 0$, значит, $\varphi \to \pi/2$ и $\rho \to \infty$. Следовательно, оси вихрей расходятся в стороны и «стелются» параллельно земле. При этом $\Delta\rho/\Delta t$ превращается в горизонтальную скорость движения оси вихря:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \to \frac{\Gamma}{2\pi \cdot \rho_m} = V_{z\infty} \quad \text{при} \quad \varphi \to \frac{\pi}{2}.$$

Оценим эту скорость. Согласно теореме, сформулированной Николаем Егоровичем Жуковским, подъемная сила – при горизонтальном полете, естественно, равная весу самолета *P* – определяется простым соотношением $P = \Gamma \cdot D_a \cdot u \cdot l$, где D_a – плотность атмосферы, и – скорость полета. Возьмем в качестве примера случай полета на высоте, равной половине расстояния между вихрями: $H = l/2$. Тогда $\varphi_0 = \pi/4$, $\rho_0 = \rho_m = \sqrt{H^2 + H^2} = H\sqrt{2} = l/\sqrt{2},$, откуда

$$V_{z\infty} = \frac{P\sqrt{2}}{2\pi \cdot D_a \cdot u \cdot l^2}.$$

Примем для оценок следующие значения параметров тяжелого взлетающего самолета: *m* = 300 т, *P* = *mg* = 3×10^6 Н, *l* = 50 м, *u* = 100 м/с, D_a = 1 кг/м^3. Получим, что вихри перемещаются вправо и влево со скоростью

$$V_{z\infty} = 2{,}6 м/с.$$

Все наши рассуждения приведены для спокойной атмосферы. А теперь представим, что справа дует поперечный ветер с такой же по величине скоростью. Тогда правый вихрь тяжелого самолета остановится над взлетной полосой и будет долго мешать взлету следующих, пока, наконец, не «растворится» в воздухе.

журнал «Квант», №6, 1996