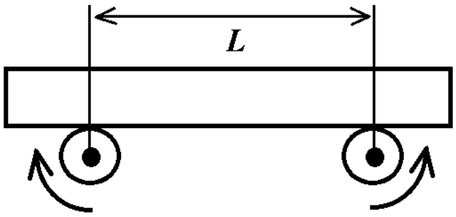
Задача «Маятник Жуковского»



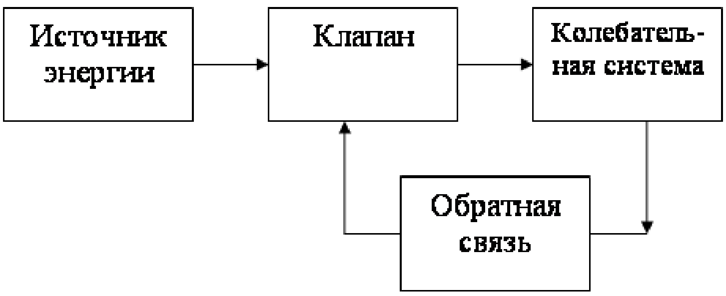
На двух вращающихся навстречу друг другу цилиндрических валиках лежит горизонтально доска (см. рис.). Расстояние между центрами валиков L, коэффициент трения между доской и каждым из валиков μ. Доску смещают в направлении одного из валиков и отпускают. Определите период возникающих при этом колебаний.

Решение

Дано: L, μ, g.

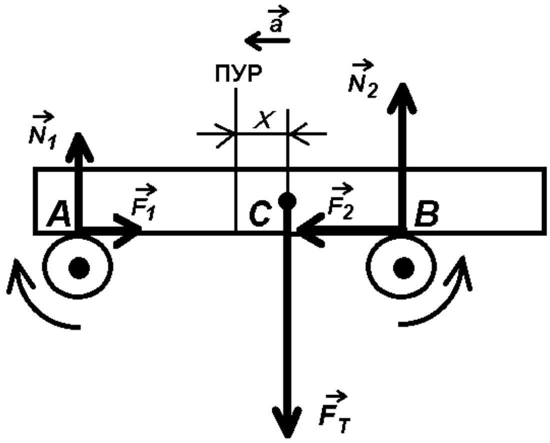
Найти: T.

Анализ: В первоначальном положении – центр масс (ц.м.) доски располагается посередине между валиками и силы давления на каждый из них одинаковы. При вращении валиков между ними и доской возникают одинаковые по величине силы трения, толкающие доску в противоположные стороны. Первоначально доска находится в положении устойчивого равновесия (ПУР). При выведении доски из ПУР – смещении доски в направлении одного из валиков, изменяется расположение ц.м. доски, что приводит к изменению сил давления на валики и различию в силах трения. Разница этих сил – возвращающая сила – толкает доску к ПУР, которое она проходит по инерции. Процесс повторяется, но в обратном направлении. Так возникают колебания. Колебания имеют постоянную амплитуду (не затухают) т.к. система является автоколебательной и в «нужные моменты» происходит её подпитка порциями энергии. (Можно выделить основные части автоколебательной системы – источник энергии, колебательную систему, клапан и обратную связь).



Рассмотрим силы (см. рис.), действующие на доску массы M при отклонении ц.м. от ПУР на некоторую величину (x).

Здесь: $F_T = Mg$ – сила тяжести, действующая на доску в точке C – её ц.м.; N_1 и N_2 – силы реакции опоры, действующие со стороны валиков на доску в точках A и B соответственно; F_1 и F_2 – силы трения, действующие на доску со стороны валиков в точках A и B соответственно.



Сила трения зависит от коэффициента трения (μ) и прижимающей силы (N). В нашем случае:

$$F_1 = \mu N_1 \quad (1)$$

$$F_2 = \mu N_2 \quad (2).$$

Реакции опор находятся из условия равновесия доски под действием внешних моментов сил ($\sum M = 0$), записанных относительно точек A и B.

Точка A: $Mg\,(\frac{L}{2} + x) - LN_2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{Mg}{L}(\frac{L}{2} + x) = \frac{Mg}{2} + \frac{Mgx}{L}$ (3)

Точка B: $LN_1 - Mg\,(\frac{L}{2} - x) = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{Mg}{L}(\frac{L}{2} - x) = \frac{Mg}{2} - \frac{Mgx}{L}$ (4)

$$(4) \rightarrow (1):\ F_1 = \mu\,(\frac{Mg}{2} - \frac{Mgx}{L}) \quad (5)$$

$$(3) \rightarrow (2):\ F_2 = \mu\,(\frac{Mg}{2} + \frac{Mgx}{L}) \quad (6)$$

Возвращающая к ПУР сила (равнодействующая) равна разности сил трения:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{2\mu Mgx}{L} \quad (7)$$

Эта сила придаёт доске ускорение и по II закону Ньютона:

$$a = \frac{\Delta F}{M} = -\ \frac{2\mu gx}{L} = -\ \frac{2\mu g}{L}x \quad (*),$$

где знак «-» показывает, что ускорение противоположно направлению смещения доски от ПУР.

Известно, что уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$a = -\ \omega^2 x \quad (**),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота.

Из аналогии $(*)$ и $(**)$ имеем, что:

$$\omega^2 = \frac{2\mu g}{L}.$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2\mu g}}}$$

Видно, что период не зависит от массы доски и определяется только параметрами установки L, μ и ускорением свободного падения g.

P.S. А от чего зависит амплитуда колебаний доски, подумайте самостоятельно!