Механика вращающегося волчка

С. А. Кривошлыков

В редакцию нашего журнала пришло письмо.

«Я купил волчок в магазине «Игрушка». При запуске он переворачивается и начинает вращаться на рукоятке.

Меня интересует, какие законы физики лежат в основе его движения? Как рассчитать размеры волчка?

Ученик 10 класса Титаревской средней школы В. Ткачев»

Нам кажется, что ответ на это письмо будет интересен многим нашим читателям. Ниже мы публикуем статью ученика 10 класса школы № 45 г. Киева Сергея Кривошлыкова, содержащую ответы на поставленные вопросы. Это несколько переработанный его доклад на IV научной конференции школьников Киева.

Волчок, о котором пишет Ткачев (его часто называют волчком Томсона), представляет собой шарик со срезанной верхушкой. В центре среза находится ножка — ось, за которую волчок раскручивается (рис. 1*).

Если волчок раскрутить шариком вниз, то он, вращаясь, наклоняется, ложится набок, касается своей ножкой поверхности стола, а затем вскакивает на нее и продолжает спокойно вращаться на ножке шариком кверху (рис. 2). С уменьшением скорости вращения волчок опять возвращается в первоначальное положение. Такое поведение волчка кажется на первый взгляд очень странным. Вскакивая на ножку, волчок увеличивает свою потенциальную энергию. Что заставляет его это делать? Ведь известно, что всякая система стремится к минимуму потенциальной энергии. Рассмотрим явления, связанные с вращением твердого тела вокруг своей оси.

Возьмем большой маховик (например, велосипедное колесо), который может свободно вращаться вокруг жесткой горизонтальной оси.

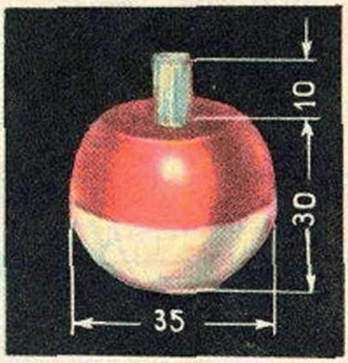

Рис. 1.

* Размеры приведены в *мм*.

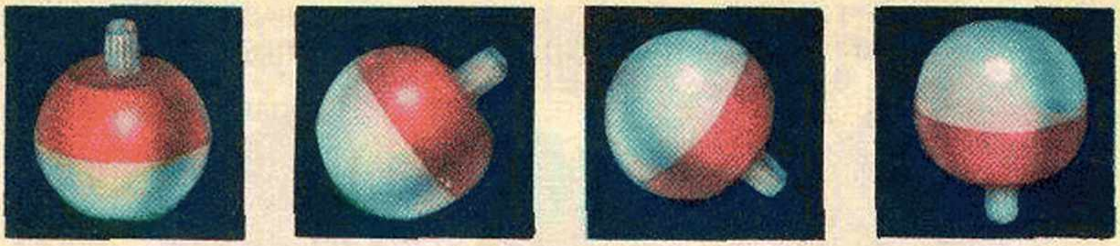

Рис. 2.

Раскрутив маховик, попробуем, взявшись руками за ось, повернуть ее в вертикальной плоскости (как показано зелеными стрелками на рисунке 3). Мы почувствуем значительное сопротивление этому повороту. Вращающийся маховик стремится сохранить свой момент количества движения (его величину и направление, а значит, угловую скорость вращения и направление оси вращения *). Приложим большее усилие. Как ни странно, но мы не получим предполагаемого поворота. Ось повернется не в вертикальной плоскости, как мы хотели, а в горизонтальной, так, как показано красными стрелками.

Это, впрочем, неожиданно лишь на первый взгляд. Как мы знаем, при вращательном движении тел вектор момента внешних сил равен скорости изменения вектора момента количества движения: $\mathbf{M} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t}$ (аналогично тому, как при прямолинейном движении тела внешняя сила, приложенная к телу, равна скорости изменения импульса тела: $\mathbf{F} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}$). Поэтому вектор $\Delta(I\omega)$ изменения момента импульса маховика за малое время Δt параллелен вектору $\mathbf{M}$ момента сил $\mathbf{F}$ (рис. 4), то есть лежит в горизонтальной плоскости. В этой же плоскости лежит и новый вектор момента импульса. Причем, так как вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен вектору $(I\omega)$, то изменение момента импульса $\Delta(I\omega)$ перпендикулярно самому вектору $I\omega$ момента импульса. (На рисунке 4 вектор $\Delta(I\omega)$ сделан непропорционально большим.) Поэтому момент импульса в нашем случае не изменяется по величине и меняет лишь направление. Это означает, что не меняется и угловая скорость вращения маховика вокруг его горизонтальной оси.

Если так же поворачивать ось в том случае, когда маховик вращается в противоположную сторону, то ось опять повернется в горизонтальной плоскости, но в противоположную сторону.

*) См. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел» («Квант» № 1, 1971).

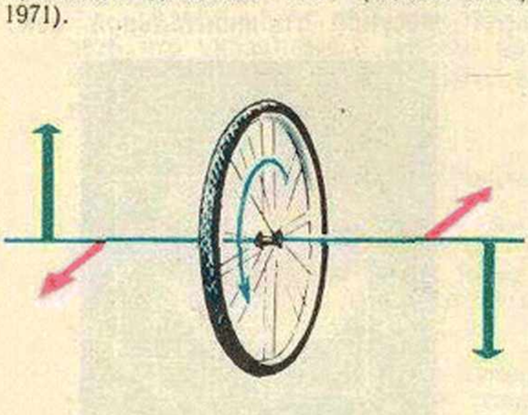

Рис. 3.

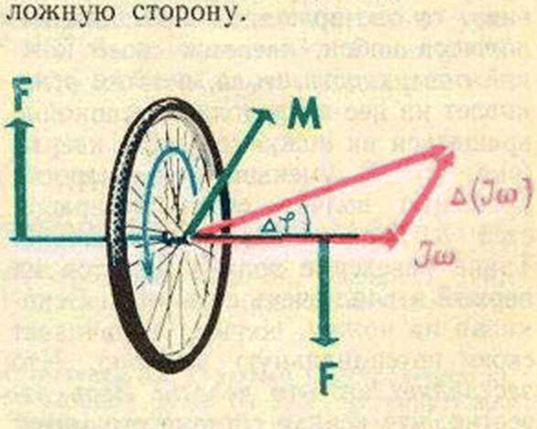

Рис. 4.

Отклонение оси быстро вращающегося тела в направлении, перпендикулярном плоскости действия поворачивающих сил, называется прецессией.

Если момент внешних сил постоянен, то и скорость изменения вектора $I\omega$ постоянна $\left(\frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = \text{const}\right)$. В этом случае ось маховика вращается с некоторой угловой скоростью Ω, которую называют угловой скоростью прецессии. Чем больше момент сил, приложенных к маховику, тем больше угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{I\omega} = \frac{\mathbf{M}}{I\omega}$$

(так как угол $\Delta\varphi_{\text{мал}}$, то $\Delta\varphi = \frac{\Delta(I\omega)}{I\omega}$). Ясно также, что чем быстрее вращается маховик (чем больше ω и $I\omega$), тем меньше угловая скорость прецессии при одном и том же моменте внешних сил (так как тем меньше угол $\Delta\varphi$ за время Δt (см. рис. 4).

Рассмотрим вращающийся обыкновенный дискообразный волчок. В начале вращения, когда угловая скорость велика, его ось практически вертикальна. Затем угловая скорость вращения под действием сил трения в точке A и о воздух уменьшается, и волчок начинает прецессировать вокруг вертикальной оси, описывая коническую поверхность с вершиной A (рис. 5). Почему это происходит?

Рассмотрим силы, действующие на волчок. Сила тяжести P и сила реакции опоры N создают момент сил, стремящийся опрокинуть волчок. Это приводит к тому, что ось волчка смещается перпендикулярно плоскости действия этих сил, то есть прецессирует. Направление смещения оси показано на рисунке 5 красной стрелкой. При прецессии ось волчка описывает коническую поверхность с вершиной в точке A.

Следует заметить, что прецессия оси волчка существовала и в самом начале его вращения из-за неизбежного толчка, который мы ему сообщили при раскручивании (идеально раскрутить волчок невозможно), но эта прецессия была небольшой.

Кроме момента пары сил P и N, на волчок действует еще момент силы трения $F_{\text{тр}}$ относительно центра масс волчка. На рисунке 6 показано увеличенное острие волчка. Если точка касания острия с поверхностью не лежит на оси вращения волчка (волчок наклонился), то момент силы трения лежит в плоскости рисунка и направлен к вертикали. Изменение момента импульса волчка, обязанное моменту силы трения, тоже направ-

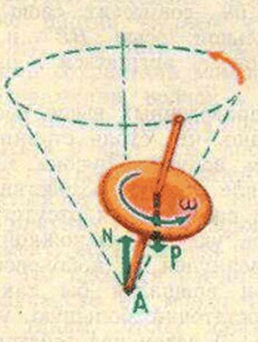

Рис. 5.

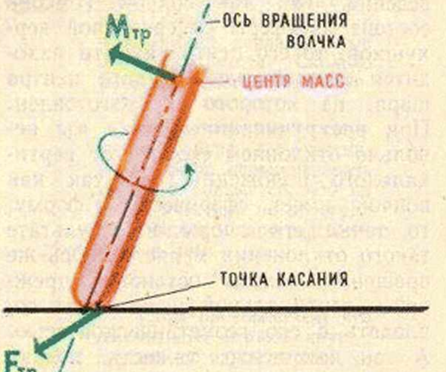

Рис. 6.

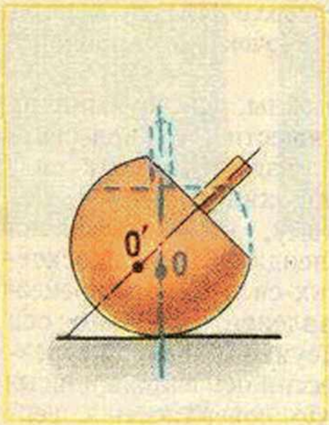

Рис. 7.

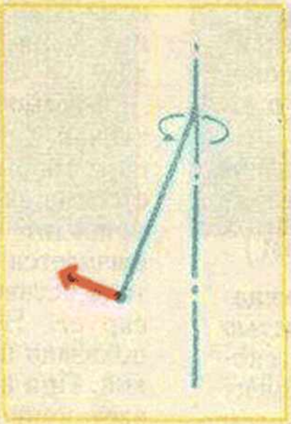

Рис 8.

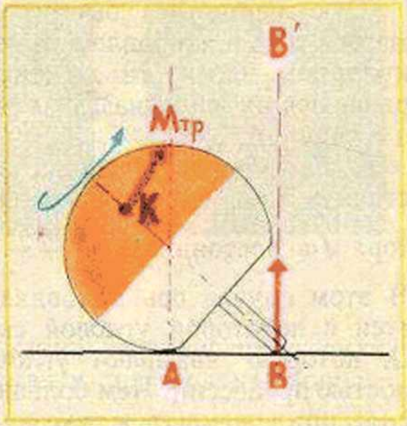

Рис. 9.

лено к оси; поэтому благодаря трению ось волчка стремится занять вертикальное положение. В этом легко убедиться, если запустить волчок наклонно. Через некоторое время его ось встанет вертикально. Момент сил трения направлен к вертикали (правило буравчика), следовательно, изменение момента количества движения волчка тоже направлено к вертикали, а ось волчка стремится стать перпендикулярно плоскости вращения.

Итак, на наклонный волчок действуют два момента сил: момент пары сил — реакции опоры и силы тяжести и момент силы трения. Движение волчка всегда происходит при наличии этих двух моментов.

Вернемся теперь к волчку Томсона и попробуем объяснить его поведение. Так как волчок Томсона состоит из сферы со срезанной верхушкой, то его центр тяжести находится ниже геометрического центра шара, из которого он изготовлен. При раскручивании волчка мы невольно отклоняем его ось от вертикального положения. Но так как волчок имеет сферическую форму, то точка его опоры в результате такого отклонения меняется. Ось же вращения волчка останется прежней — вертикальной и не будет совпадать с его геометрической осью. А так как центр тяжести волчка лежит ниже геометрического центра шарика, то в результате такого отклонения его центр тяжести уже не будет лежать на оси вращения (рис. 7). Он займет положение O' и будет вращаться вместе с волчком около вертикальной оси. При вращении с большой угловой скоростью центр тяжести волчка будет подниматься точно так же, как поднимается шарик на нити, если нить раскручивать так, как показано на рисунке 8.

Волчок не задерживается в боковом положении, а по инерции проскакивает его, касаясь своей ножкой плоскости, на которой он вращается (рис. 2). Как только это произойдет, точка опоры волчка перескочит из точки A в точку B (рис. 9), и волчок, вращаясь около своей оси, начнет прецессировать около оси BB'. Иными словами, волчок Томсона будет вести себя как «обыкновенный» волчок. Под действием момента силы трения он совместит свою ось с вертикальной осью BB' и будет продолжать вращаться шариком кверху.

Из приведенных выше рассуждений видно, что столь странным поведением волчка Томсона мы обязаны силе трения. Действительно, если бы сила трения отсутствовала, то волчок, ударившись ножкой о плоскость, вернулся бы в боковое положение и вращался бы так, пока имел достаточно большую угловую скорость. А затем под действием момента силы тяжести вернулся бы в исходное положение (рис. 2).

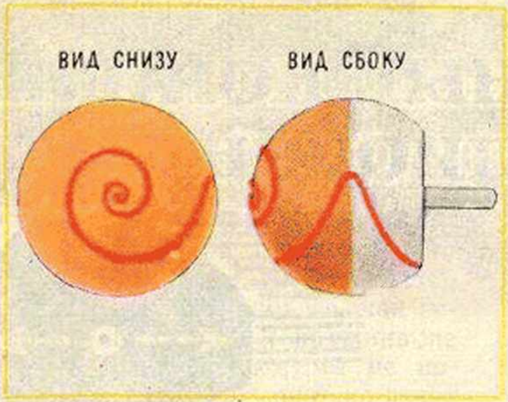

Рис. 10.

С волчком Томсона можно провести интересный опыт. Если волчок запустить по поверхности, покрытой тонким слоем пудры, то пудра оставит на поверхности волчка след — траекторию точки касания волчка с плоскостью. Этот след показан на рисунке 10. Линия на волчке закручивается спиралью, но на экваторе шарика волчка она начинает раскручиваться в обратную сторону. Почему это происходит? Закон сохранения момента количества движения требует, чтобы волчок вращался в одну и ту же сторону, как в исходном положении, так и в перевернутом. Пусть мы запустили волчок по часовой стрелке (если смотреть на него сверху). Если бы волчок перевернулся, не переставая вращаться вокруг своей оси, то в перевернутом состоянии он вращался бы уже против часовой стрелки. Поэтому, для того чтобы выполнялся закон сохранения момента количества движения, волчок в какой-то момент времени должен прекратить вращаться вокруг оси, проходящей через его ножку, а затем начать вращаться в обратную сторону. Судя по рисунку 10, это и происходит в тот момент, когда волчок лежит на боку.

Что касается расчетов размеров волчка, то он может быть любым, но таким, чтобы центр его масс не совпадал с геометрическим центром сферы, из которой он изготовлен.

ЗАДАЧИ О ШАХМАТНОМ ТУРНИРЕ

1. В турнире*) участвовало 8 шахматистов. Все они набрали разное число очков, причем второй призер набрал столько же, сколько набрали все шахматисты, занявшие места с 5-го по 8-е. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие 3-е и 5-е места?

2. В турнире играли два ученика 7-го класса и несколько учеников 8-го. Семиклассники набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали поровну. Сколько восьмиклассников могло участвовать в турнире?

3. В турнире участвовало n шахматистов — гроссмейстеры и мастера. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в партиях против мастеров. Доказать, что $\sqrt{n}$ — целое число.

4. Шахматист играет для тренировки не менее одной партии в день и, чтобы не переутомиться, не более 12 — в неделю. Доказать, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

5. Каждый шахматист в турнире половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

6. Доказать, что по окончании турнира его участников можно перенумеровать так, что окажется, что ни один участник не проиграл следующему непосредственно за ним.

---

*) Мы предполагаем, что шахматисты играют друг с другом по одной партии, то есть турнир проводится в один круг.