ЩЕПАН ЕЛЕНЬСКИЙ

ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА

ДЕТГИЗ · 1961

Щепан Еленьский

ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА

Занимательная математика

Перевод с польского

Государственное Издательство Детской Литературы
Министерства Просвещения РСФСР
Москва 1961

Научный редактор Ф. В. Широков

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга называется «По следам Пифагора» в честь великого математика, творца математической школы древней Греции.

Пифагор родился на острове Самос приблизительно в 580 году до нашей эры. Большое влияние на развитие Пифагора оказало его пребывание в Египте.

В период своего наивысшего творческого расцвета Пифагор жил в Кротоне — греческой колонии на юге Италии. Здесь и возникла пифагорейская школа, которая сыграла большую роль в развитии греческой математики.

Пифагор считал, что в основе всего мироздания лежит число (сейчас мы бы сказали: натуральное число). Интерес Пифагора и его школы к свойствам чисел стал источником позднейшей теории чисел. Память об этом сохранена в названии таблицы Пифагора.

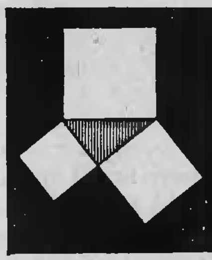
Пифагор искал числовые отношения в геометрических построениях. Ему был известен так называемый египетский треугольник со сторонами, выраженными числами 3, 4 и 5. Египтяне знали, что это прямоугольный треугольник, и употребляли его для определения прямых углов при восстановлении размываемых ежегодными разливами Нила границ земельных участков.

Пифагор показал нам зависимость между сторонами египетского треугольника, которая выражается формулой: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Занимаясь поисками треугольников, стороны которых a, b, c удовлетворяли бы условию: $a^2 + b^2 = c^2$, Пифагор нашел формулы, которые в современной символике могут быть выражены так:

$$a = 2n + 1; \quad b = 2n(n + 1); \quad c = 2n^2 + 2n + 1,$$

где n означает произвольное целое число. Оказалось, что всякий треугольник с такими сторонами является прямоугольным треугольником.

Теперь прямоугольные треугольники со сторонами, выраженными натуральными числами, мы называем пифагорейскими треугольниками.



Пифагору приписывается открытие теоремы, согласно которой квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме квадратов, построенных на его катетах. Это так называемая теорема Пифагора.

Вначале считали, что стороны каждого прямоугольного треугольника можно выразить такими натуральными числами a, b, c, которые будут удовлетворять формуле $a^2 + b^2 = c^2$. Дальнейшие исследования математиков пифагорейской школы показали, что это не так.

Например, равнобедренный прямоугольный треугольник (составляющий половину квадрата) не является пифагорейским треугольником, потому что нельзя найти такие три натуральных числа a, b, c, которые удовлетворяли бы условию

$$a^2 + a^2 = c^2, \quad \text{или} \quad 2a^2 = c^2.$$

Для пифагорейцев это было ужасным открытием: вера в то, что все явления во Вселенной можно объяснить с помощью натуральных чисел, была подорвана.

Открытие, что мир чисел противоположен миру геометрических построений, произвело такое большое впечатление, что сторонники пифагорейской школы сохраняли это открытие в тайне и в дальнейших работах геометрические исследования всячески отделяли от арифметических. Это сильно тормозило развитие греческой арифметики, но в то же время способствовало быстрому развитию геометрии.

Странными путями шло развитие отдельных отраслей точных наук в древней Греции.

Геометрия, развитие которой неразрывно связано с великими именами Евклида, Архимеда, Аполлония (IV, III и II века до н. э.), первой достигает большого совершенства. Затем, уже во II веке нашей эры, благодаря великим успехам Птолемея наступил расцвет астрономии. Наконец, в конце III века, Диофант закладывает основы систематизированной арифметики.

После трех корифеев науки: Евклида, Птолемея, Диофанта—остались фундаментальные труды: «Начала», «Альмагест», «Арифметика», каждый из которых делится на тринадцать книг.

Однако у источника этого великого потока мысли лежат исследования Пифагора. Чтобы воздать должное его заслугам, эту книгу по занимательной математике мы назвали «По следам Пифагора».

Инж. Щ. Еленьский

Перевод с польского
Г. Ф. Боярской, Б. В. Боярского
и А. А. Якушева

Часть первая

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНЕКДОТЫ И АНЕКДОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Общие замечания

Математических анекдотов существует очень много, а анекдотическим задачам просто нет конца. Чем же следует руководствоваться при их выборе? Главным образом принципом наибольшего разнообразия.

Среди приведенных здесь задач и математических анекдотов читатель найдет самые разнотипные: задачи на деление, задачи, в которых говорится о расстановке, разливании чего-либо, о переправах, маневрах и т. д.; задачи из самых различных эпох: возникшие тысячи, сотни и десятки лет назад; задачи китайские, индийские, греческие, арабские, русские, французские и т. д.; задачи великих математиков: Леонардо Фибоначчи, Исаака Ньютона, и др., а также задачи неизвестных авторов, дошедшие до нас по традиции. А по тематике почти каждая задача своеобразна.

Все задачи легкие, доступные каждому, кто хоть немного знаком с элементарной арифметикой, алгеброй и геометрией. А те читатели, память которых не сохранила этих знаний, смогут воспользоваться большинством приведенных здесь задач, освежая в памяти в форме развлечения давно усвоенные математические истины.

Для многих задач полностью приведены решения, для некоторых даны только ответы, а для других не даны и ответы: это задачи, самостоятельное решение которых (по аналогии с предыдущими) может принести читателю не только пользу, но и доставить истинное удовольствие.

1. Имущество араба

Это одна из старейших, вероятно арабских, задач неизвестного автора. Некий араб оставил в наследство трем своим сыновьям стадо верблюдов, причем старшему сыну завещал половину стада, среднему — третью часть, а самому младшему — девятую часть наследства. Однако в стаде оказалось 17 верблюдов.

Разделить наследство было трудно, поэтому наследники обратились за советом к судье, известному своей мудростью во всей округе. Судья решил так: нужно одолжить одного верблюда и приступить к разделу, имея 18 верблюдов. Братья сделали, как советовал судья. Тогда старшему досталось 9 верблюдов, среднему 6, а младшему 2, взятого верблюда вернули хозяину. Братья остались очень довольны мудрым решением кадия, так как каждый из них получил больше, чем завещал отец, а именно: один на $\frac{1}{2}$ больше, другой на $\frac{1}{3}$, а третий на $\frac{1}{9}$ верблюда.

Этот любопытный результат кажется парадоксальным. Однако по сумме трех частей, на которые отец велел сыновьям разделить наследство $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, мы убеждаемся, что если бы раздел имущества был выполнен точно по завещанию, то $\frac{1}{18}$ наследства не была бы разделена. Вот в чем источник тех «излишков», которые неожиданно, к своей радости, получили наследники.

2. Как поставить точное время

У меня временно нет карманных часов, они сданы в починку часовому мастеру, а стенные остановились. Я отправляюсь к своему знакомому, часы которого, как мне известно, всегда идут безукоризненно. Побыв у знакомого некоторое время, я возвращаюсь домой и точно ставлю на часах время. Каким же образом я мог это сделать, если предварительно не знал, сколько времени занимает дорога от моего дома до дома знакомого?

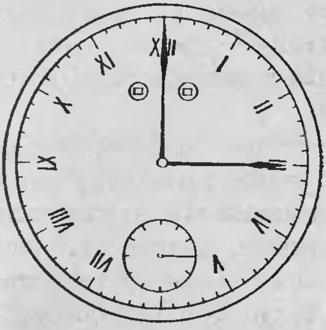


Рис. 1. Время *a*: завожу часы и выхожу из дому

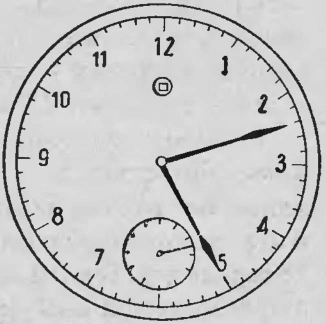


Рис. 2. Время *b*: я пришел к знакомому

Задача сводится к тому, что необходимо установить точное время, вернувшись домой. Уходя из дому, я пускаю в ход свои часы, ставлю какое-нибудь время; обозначим его буквой *a* (рис. 1). Придя к знакомому, сразу же записываю время, которое показывают его часы; обозначим это время буквой *b* (рис. 2).

Поговорив со знакомым, я отправляюсь домой, но перед самым уходом замечаю время на его часах и записываю его; пусть это будет время *c* (рис. 3). Вернувшись домой, я проверяю, какое время показывают мои часы, поставленные наудачу; обозначим это время через *d* (рис. 4). Когда я шел домой, я продумал план действий, поэтому через минуту после моего возвращения стенные

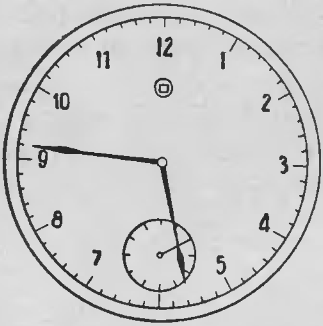


Рис. 3. Время *c*: через минуту я отправляюсь домой

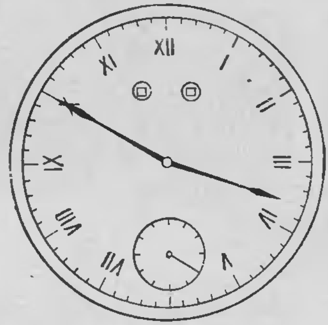


Рис. 4. Время *d*: момент возвращения домой

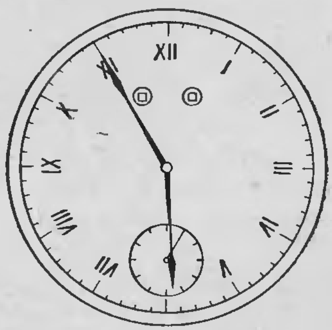


Рис. 5. Время *e*: через минуту после моего возвращения домой мои часы уже идут точно

часы уже показывали правильное время; это было время *e* (рис. 5).

А вот вычисления:

Разность $d - a$ показывает, сколько времени я отсутствовал: $d - a = 3$ час. 50 мин. — 3 час. 00 мин. = 50 мин.

Разность $c - b$ показывает, сколько времени я провел у знакомого: $c - b$ = 5 час. 46 мин. — 5 час. 12 мин. = 34 мин.

Разность $(d - a) - (c - b)$ показывает, сколько времени затрачено на дорогу туда и обратно: $(d - a) - (c - b)$ = 50 мин. — 34 мин. = 16 мин.

В обе стороны я старался идти равномерным шагом, следовательно, могу предположить, что на обратную дорогу затрачена половина этого времени:

$$\frac{(d-a)-(c-b)}{2} = 8 \text{ мин.}$$

Прибавив это время ко времени c, в сумме я получу правильное время в момент моего возвращения домой:

5 час. 46 мин. + 8 мин. = 5 час. 54 мин.

Добавляю еще минуту, ушедшую на вычисления, и получаю точное время.

3. Как разделить циферблат часов

А. Разделить циферблат часов прямой линией на две части так, чтобы суммы чисел в обеих частях были одинаковые. Чему будет равна эта сумма?

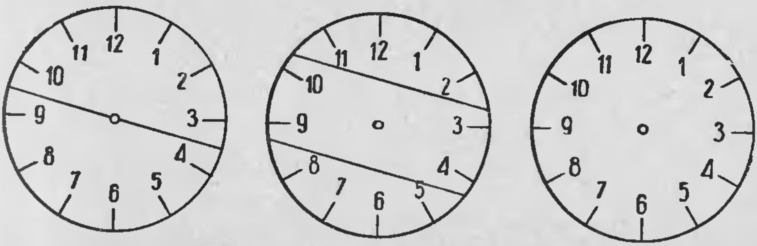


Рис. 6

Б. Разделить циферблат часов на три части двумя прямыми линиями так, чтобы суммы чисел в этих частях были равны между собой.

В. Разделить циферблат часов на шесть таких частей.

На рисунке 6 приводим решение двух первых задач. Третью задачу предлагаем читателю решить самостоятельно.

4. Древний парадокс Зенона в новом виде

Ровно в полночь или в полдень обе стрелки часов стоят под цифрой 12. Часом позже часовая стрелка будет указывать на цифру 1, а минутная — на 12. Когда минутная стрелка дойдет до цифры 1, часовая продвинется вперед на $\frac{5}{12}$ минутного деления; когда же минутная стрелка дойдет до этой точки, где находилась часовая (через $5\frac{5}{12}$ минуты после начала часа), часовая стрелка снова передвинется дальше — и так до бесконечности. Итак, минутная стрелка «в принципе» и «теоретически» не должна не только опережать, но даже догонять часовую стрелку.

Как объяснить этот парадокс?

В этом соревновании стрелок, как и в соревновании Ахиллеса с черепахой, весь секрет заключается в том, что последовательное перемещение минутной стрелки дает бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а именно $5 + 5\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2 + 5\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3 + \ldots$

Первый член этой прогрессии $a = 5$, частное $q = \frac{1}{12}$. Так как для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии известна следующая формула: $S = \frac{a}{1-q}$, то $S = \frac{5}{1-\frac{1}{12}} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$, а следовательно, в 1 час $5\frac{5}{11}$ мин. стрелки встретятся впервые в этот день, считая от полудня или от полуночи.

А вот еще одно небольшое подтверждение этого рассуждения.

Предположим, что минутная стрелка догонит часовую через x минут после 1 часа. Путь, который пройдет за это время часовая стрелка, конечно, равен $\frac{x}{12}$. Угол, который опишет минутная стрелка, будет на 5 мин. больше угла, пройденного часовой стрелкой. Отсюда $x - \frac{x}{12} = 5$, следовательно, $x = 5 \cdot \frac{12}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$.

5. Как определить страны света, пользуясь карманными часами

В солнечный день при помощи карманных часов можно наметить на горизонте с точностью, достаточной для практических целей, четыре страны света: север, юг, восток и запад. Этот способ так прост и доступен, что следует удивляться, почему он до сих пор еще не нашел широкого применения.

Определение направления основано на следующем.

Положив на ладонь карманные часы, поворачиваем их так, чтобы часовая стрелка была направлена в сторону солнца; тогда точка, лежащая на окружности циферблата, точно посередине между часовой стрелкой и числом XII, укажет нам направление на юг. Если, например, часовая стрелка показывает IV часа (рис. 7), мы, направив ее в сторону солнца, удостоверяемся, что точка, лежащая посередине между цифрами IV и XII, то есть точка, обозначающая II часа, указывает на юг. В противоположной стороне будет север, налево — восток, направо — запад.

Этот способ можно видоизменить следующим образом. На окружности циферблата следует найти точку, расположенную посередине между цифрой, на которую указывает часовая стрелка, и точкой над цифрой XII и направить эту центральную точку в сторону солнца; тогда число XII укажет направление на юг.

Например, если часы показывают IV часа, то к солнцу нужно направить часы делением, находящимся над цифрой II. Тогда линия, проведенная от центра часов к числу XII, укажет направление на юг.

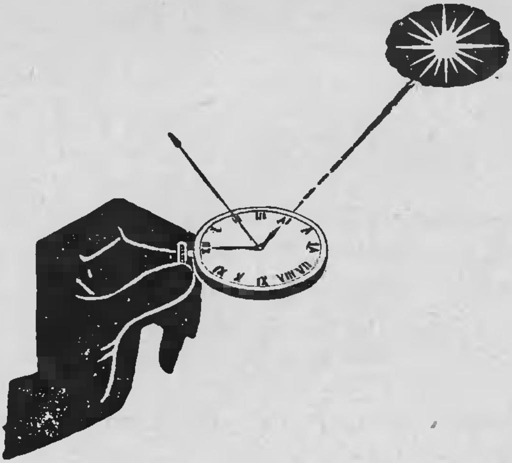


Рис. 7

В подтверждение вышесказанного достаточно напомнить, что в XII часов, в полдень, солнце, часовая стрелка и деление на окружности циферблата, находящееся над цифрой XII, лежат на одной линии, направленной на юг.

Потом и солнце и часовая стрелка передвигаются в одном направлении, только часовая стрелка сделает полный оборот за 12 часов, а солнце за 24 часа, то есть за промежуток времени вдвое больший. Именно на этом и основаны приведенные выше правила. Следует добавить, что до полудня центральную точку между стрелкой и цифрой XII нужно искать по направлению вращения стрелок, а после полудня — в обратном направлении.

З а м е ч а н и е. Определенное таким образом направление, конечно, не будет точным. Неточность вызвана тем, что мы помещаем часы в горизонтальной плоскости, вместо того чтобы поместить их в плоскости небесного экватора. При этом не учитывается разница между истинным солнечным временем и временем условным, которое показывают часы (у нас восточноевропейское время). Но для практических целей указанный выше способ будет вполне удовлетворительным.

Для жителя стран Южного полушария этот способ нужно изменить следующим образом.

Точку, лежащую на циферблате часов над часовой стрелкой, следует направить в сторону солнца, тогда линия, делящая пополам угол между часовой стрелкой и точкой над цифрой XII, обозначит направление на север.

6. Как можно продать целое яйцо, продавая по пол-яйца

Продавщица магазина рассказала такую, казалось бы, невероятную историю:

— Сегодня утром одна покупательница купила в магазине половину всех яиц и еще пол-яйца; вторая — половину оставшихся и тоже еще пол-яйца; третья — половину оставшихся и еще пол-яйца; то же самое сделали четвертая, пятая и шестая покупательницы. Под конец в ящике осталось только одно яйцо.

— Вы рассказываете невероятные вещи! Кому бы вы могли продать пол-яйца! — сказал ей собеседник.

— Но я никому не продавала пол-яйца, а всегда только целые яйца! — ответила продавщица.

Тут в разговор вмешался студент:

— Я был седьмым покупателем. Купил половину оставшегося запаса яиц и еще пол-яйца.

На это продавщица заметила:

— Да-да, я помню, это так и было! Вы купили последнее яйцо!

Секрет заключается в том, что каждый раз в ящике оставалось нечетное число яиц.

Предположим, что первоначально в ящике было $2r + 1$ яиц...

Покупатель купил половину этого запаса, то есть $r + \frac{1}{2}$ яиц, и еще $\frac{1}{2}$ яйца, всего $r + 1$ яиц, а следовательно, взял целые яйца — без всякого деления на половины. В ящике осталось r яиц. Согласно рассказу продавщицы, это число опять должно было быть нечетным. А теперь спросим себя: сколько всего яиц было в магазине с самого начала распродажи?

Эту задачу начнем решать с конца. Мы знаем, что если покупатель застал в магазине $2r + 1$ яиц, то он купил $r + 1$ яиц и оставил r яиц. Составим таблицу:

Покупатель	Оставил	Купил	Застал
Седьмой	0	1	1
Шестой	1	2	3
Пятый	3	4	7
Четвертый . . .	7	8	15
Третий	15	16	31
Второй	31	32	63
Первый	63	64	127

Итак, мы определили, что в начале торговли было 127 яиц. Эту задачу можно обобщить для n покупателей. Тогда к началу продажи яиц будет $2^n - 1$. Если, например, $n = 7$, то в начале дня было

$$2^7 - 1 = 128 - 1 = 127 \text{ яиц.}$$

7. Раскладывание яблок

В семи ящиках находится некоторое количество яблок. Если из первого ящика переложить в каждый из остальных ящиков по стольку яблок, сколько в каждом из них уже есть, и то же самое проделать с каждым из остальных ящиков, то под конец во всех ящиках будет по 128 яблок. Можно ли определить (не применяя алгебры), сколько яблок было в первом ящике?

Конечно! Только вычисления нужно начать с конца...

Так как после седьмого перекладывания в каждом ящике оказалось по 128 яблок, то это означает, что в первых шести ящиках первоначально было по 64 яблока, а в седьмом ящике их было $128+6 \cdot 64 = 512$. Рассуждая таким образом и дальше, мы поочередно можем определять количество яблок в ящиках перед шестым, пятым, четвертым, третьим, вторым и, наконец, первым перекладыванием:

128	128	128	128	128	128	128
64	64	64	64	64	64	512
32	32	32	32	32	480	256
16	16	16	16	464	240	128
8	8	8	456	232	120	64
4	4	452	228	116	60	32
2	450	226	114	58	30	16
449	225	113	57	29	15	8

Оказывается, что первоначально в ящиках находилось следующее количество яблок: 449, 225, 113, 57, 29, 15, 8.

Стоит отметить правило образования этих чисел:

$$a_1 = 8;$$
$$a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 15;$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 29;$$
$$a_4 = 2 \cdot a_3 - 1 = 57.$$

. . . .

8. Сколько воды в бочке

Два садовника поспорили о том, сколько воды находится в бочке; в ней нужно было распустить калийную соль. Один из них утверждал, что воды больше половины бочки, другой настаивал, что меньше. Как убедиться, кто прав, не пользуясь для этого ни шнурком, ни прутом и ничем прочим, что могло быть использовано для измерения?

Вот объяснение.

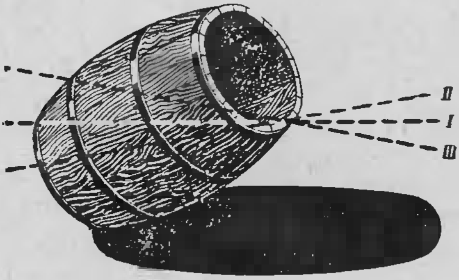


Рис. 8

Мы имеем дело не с математической шуткой, а с настоящей геометрической задачей, хотя решение ее до смешного легкое.

Если бочка действительно была наполнена водой до половины, то, наклонив ее так, чтобы поверхность воды достигла края бочки, мы увидим, что высшая точка дна находится тоже на поверхности воды (уровень *I* на рисунке 8). Это следует из того, что плоскость, проведенная через диаметрально противоположные точки верхнего и нижнего обручей бочки, делит ее на две равные части.

Если же воды меньше половины бочки, то при таком наклоне из воды должен будет выступить больший или меньший кусок дна (уровень *II* на рисунке 8). И, наконец, если воды больше половины бочки, то при наклоне дно бочки будет целиком находиться под водой (уровень *III* на рисунке 8). Таким путем без всяких измерений можно получить точный ответ.

9. Ящики с шарами

Фабрика выслала ящик кубической формы, наполненный стальными шарами. Пустой ящик весил 2 *кг*, а вместе с шарами ящик весит 18 *кг*. В ящике находится 64 одинаковых шара, уложенных вплотную в четыре слоя: в нижнем ряду ящика лежит слой из четырех рядов, по четыре шара в каждом, над этим слоем находится другой, такой же, выше — третий, и, наконец, — четвертый (рис. 9).

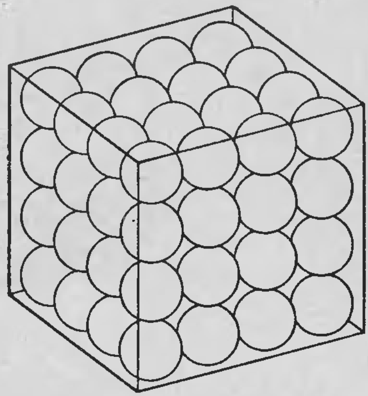


Рис. 9

В другом таком же ящике находится 1000 шаров, уложенных в десять слоев из десяти рядов, по десять шаров в каждом. Сколько весит этот ящик вместе с шарами?

Какой ящик весит больше?

Шары из первого ящика без ящика весят всего 16 *кг*, а так как в ящике 64 шара — значит, каждый шар весит 0,25 *кг*.

А сколько бы мог весить один большой шар, который бы касался всех шести граней ящика?

Диаметр такого шара был бы в четыре раза больше диаметра любого из 64 шаров, присланных в первом ящике. Вес такого шара был бы в $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ раза больше, чем вес каждого из 64 шаров, присланных в первом ящике.

Следовательно, один большой шар весил бы точно столько, сколько 64 шара, присланные в первом ящике, то есть 16 *кг* (рис. 10).

Если мы теперь возьмем шары, диаметр которых в два раза меньше диаметра большого шара, то в ящике поместится $2 \cdot 2 \cdot 2=8$ шаров, а общий вес будет такой же, как и у большого шара (рис. 11).

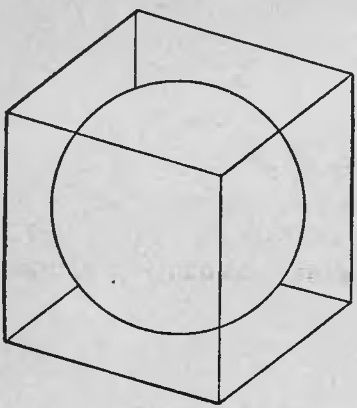


Рис. 10

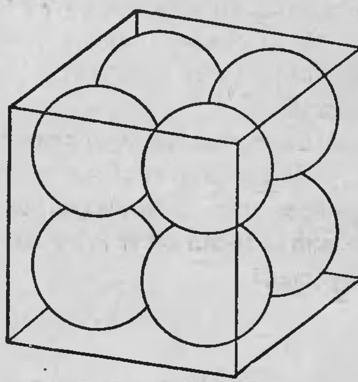


Рис. 11

А если бы мы взяли шар, диаметр которого был бы в три раза меньше диаметра большого шара, то шаров поместилось бы $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, а общий вес остался бы тот же. Теперь мы можем ответить на вопрос, сколько весил ящик с тысячью шарами:

16 *кг* вес нетто и 18 *кг* вес брутто.

А теперь пусть читатель определит, сколько бы весил такой ящик, если бы его наполнить стальной дробью, уложенной одинаковыми слоями.

10. Горькое лекарство

Ребенок заболел. Врач прописал ему лекарство и велел давать его больному по 15—20 *г*.

Мать взяла рюмку в форме конуса. Рюмка вмещала ровно 20 $г$ лекарства. Но лекарство было горькое. Сын упрашивал мать разрешить ему выпить только половину лекарства: «Вот до сих пор». И показал ноготком место, соответствующее половине высоты жидкости в рюмке (рис. 12). Мать некоторое время возражала, но в конце концов уступила. Сын выпил «половину» лекарства.

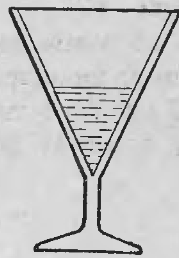


Рис. 12

А что же по этому поводу сказал врач?

— Вот и хорошо! Остальная часть по своей высоте в 2 раза меньше всей рюмки, зато по объему в 8 раз меньше. Малыш оставил всего 2,5 $г$ лекарства, а выпил 17,5 $г$. Выздоровеет!

11. Как расставить солдат на посты?

В квадратный двор арсенала вошел лейтенант с командой солдат: он должен был расставить посты. Вдоль

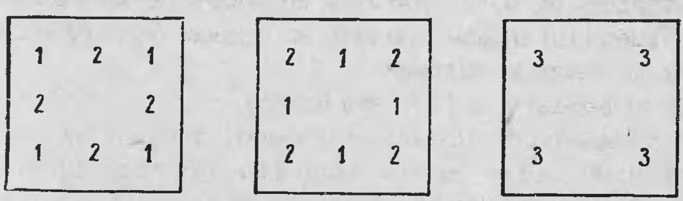


Рис. 13

каждой стены он поставил по 4 солдата и ушел. Спустя некоторое время пришел капитан. Он решил, что постов недостаточно, и поместил вдоль каждой стены по 5 солдат.

Наконец, во дворе арсенала появился майор и поставил вдоль каждой стены по 6 солдат.

Как были расставлены солдаты в первом, втором и третьем случае, если эти три офицера располагали одним и тем же числом солдат?

Решение довольно простое (рис. 13).

12. Ключи от чемоданов

В универмаг прислали 10 чемоданов, а в конверте отдельно 10 ключей, причем предупредили, что каждый ключ открывает только 1 чемодан и что к каждому чемодану можно подобрать подходящий ключ.

Работник универмага, который получал эти чемоданы, вздохнул:

— Сколько возни с подбором ключей! Я знаю, какими упрямыми бывают неодушевленные предметы! Начнешь подбирать ключ к первому чемодану, и обязательно окажется, что подойдет только десятый ключ. Десять раз перепробуешь ключи из-за одного чемодана, а из-за десяти — целых сто раз!

Сотрудница, которой дома часто приходилось иметь дело с ключами, сказала:

— Дело обстоит не так уж плохо. Только при подборе ключа к первому чемодану вам действительно придется перепробовать десять ключей. Ко второму вы уже испробуете только девять ключей. Таким образом, количество ключей постепенно будет уменьшаться.

Так подсчитаем же, сколько раз придется подбирать ключи: $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$. Значит, не более 55 раз предстоит пробовать ключи.

В этот момент сотрудник-рационализатор посоветовал:

— Главное, не перебирайте ключи один за другим, пробуя их подобрать к одному чемодану, а лучше возьмите один какой-нибудь ключ и пробуйте им открыть один чемодан за другим. Так дело пойдет быстрее, да и ключи у вас не будут путаться. Кроме того, уже с первым ключом вы проделаете не десять, а самое большее девять проб; если эти девять проб будут напрасными, то ключ можно смело привязывать к десятому чемодану. С другим ключом вы проделаете только восемь проб, с третьим — семь проб... с девятым — только одну, а для десятого ключа останется только один чемодан и пробовать его уже не будет нужно!

Значит, всего будет проделано самое большее 45 проб!

Да, но так произойдет только в самом неудачном случае — именно тогда, когда каждый ключ будет подходить только к последнему чемодану. Однако скорее всего общее число необходимых попыток составит половину максимального числа. Значит, будет достаточно 22 или 23 попыток.

13. Автомашины и самолет

Между Варшавой и Познанью расстояние 300 *км*. В один и тот же день, в один и тот же час, минуту и секунду из обоих городов навстречу друг другу выезжают два автомобилиста; они без остановок едут со скоростью 50 *км/час*. Одновременно с ними из Варшавы вылетает самолет, который делает 100 *км/час*. Самолет, опередив автомобиль, едущий из Варшавы, летит навстречу другому, выехавшему из Познани. Встретив его, самолет немедленно поворачивает обратно и летит навстречу первому автомобилю; долетев до него, он снова поворачиваст и направляется ко второму. Эти перелеты повторяются до тех пор, пока автомашины не встретятся. Сколько километров проделает самолет?

При решении этой задачи читатель обычно теряется в очень сложных вычислениях: где самолет встретил автомашину, едущую из Познани, затем, где встретил автомашину, которую вначале обогнал, и т. д.

А между тем задача решается неслыханно просто: машины встретились по истечении 3 часов, а следовательно, самолет летал ровно 3 часа и пролетел 300 км.

14. Шелковая нить

Один оригинал произвел следующие вычисления, основанные на данных, которые, нужно признаться, нелегко проверить. Город Лион, славящийся своими шелкоткацкими фабриками, ежегодно потребляет 1 млн. *кг* шелка. 1 *г* шелка прядут 4 шелкопряда, это означает, что для шелковой промышленности Лиона необходимы 4 млрд. шелкопрядов. 1 шелкопряд может выпрясть нитку длиной 500 *м*, а 4 млрд. этих маленьких тружеников дадут нить длиной 2000 млрд. *м*, то есть 2 млрд. *км*.

Длина этой нити в 13 раз больше расстояния, отделяющего Землю от Солнца, и в 5200 раз больше расстояния между Землей и Луной. Если протянуть ее вдоль экватора, то она охватила бы наш земной шар 25 тысяч раз, а Луну — 92 тысячи раз.

15. Туристы и пирожки

Три туриста, продрогшие и голодные, пришли на туристическую базу, чтобы отдохнуть и что-нибудь перекусить. Они заказали пирожки и попросили, чтобы их подали прямо в комнату, в которой они будут отдыхать. Дожидаясь пирожков, они уснули.

Когда пирожки были готовы, их принесли в комнату и поставили на стол, не будя спящих. Проснувшись, один из туристов заметил пирожки, пересчитал их, съел третью часть и опять заснул.

Затем проснулся второй турист и, пересчитав пирожки, съел третью часть и опять лег спать.

Наконец, проснулся третий турист и поступил точно так же.

Осталось 8 пирожков. Как определить, сколько пирожков подали к столу? Кому полагаются оставшиеся пирожки, если делить их справедливо?

Итак, третий турист оставил товарищам 8 пирожков, то есть каждому по 4 штуки; следовательно, он сам съел 4 пирожка; это позволяет нам сделать заключение, что, проснувшись, он застал 12 пирожков.

Теперь мы знаем, что второй турист оставил 12 пирожков, по 6 для каждого из своих товарищей, а сам тоже съел 6 пирожков; отсюда следует, что, проснувшись, он застал 18 пирожков.

Теперь уже легко установить, что если первый турист оставил для товарищей 18 пирожков, по 9 для каждого, то и сам он, значит, съел 9 пирожков; следовательно, первоначально было 27 пирожков.

Как разделить оставшиеся 8 пирожков? Совершенно очевидно, что первый турист уже съел свою порцию: 9 пирожков. Второй турист съел 6 — значит, ему полагаются еще 3 пирожка, а третий турист съел только 4 — значит, ему полагаются еще 5 пирожков.

16. Переформирование поездов

Железнодорожная станция должна была отправить 11 поездов по 35 платформ для угля в каждом поезде. Чтобы освободить несколько локомотивов для другой работы, машинисты посоветовали прицепить к каждому поезду столько раз по 5 вагонов, сколько локомотивов отправлено по другому заданию.

Таким образом, все платформы для угля были прицеплены. Сколько локомотивов было освобождено для другой работы?

Вагонов для угля было $11 \cdot 35 = 385$. Число 385 нужно разложить на множители другим способом, а именно так, чтобы одним множителем было число n, меньшее 11, а другим — число $35 + n \cdot 5$.

Разложим число 385 на простые множители: $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, и выпишем все делители этого числа в возрастающем порядке: 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385.

Из этих делителей можно подобрать следующие пары сомножителей, дающие в произведении число 385:

$$1 \cdot 385 = 5 \cdot 77 = 7 \cdot 55 = 11 \cdot 35.$$

Оказывается, вместо 11 поездов по 35 платформ можно послать 7 поездов по 55 платформ. Это освободит 4 локомотива. К каждому поезду нужно прицепить 4 раза по 5 платформ, что и отвечает условию задачи.

Эту задачу можно решить и при помощи уравнения.

Обозначим через x число локомотивов, освобожденных для другой работы. Тогда останется $11 - x$ локомотивов, и каждый локомотив должен будет взять $35 + x \cdot 5$ платформ. Таким образом, мы получаем следующее уравнение: $(11 - x) \cdot (35 + x \cdot 5) = 385$. После алгебраических преобразований мы имеем $20x - 5x^2 = 0$, откуда в окончательном виде получаем $x(4 - x) = 0$. Это уравнение имеет два решения: $x = 0$ (так было при первом условии, если бы все локомотивы должны были отправиться с платформами для угля) или $x = 4$ (это означает, что высвобождено 4 локомотива).

17. По грибы

Дед со своими четырьмя внуками отправился в лес по грибы. В лесу они разошлись в разные стороны, каждый пошел искать грибы своей дорогой. Через полчаса дедушка остановился под деревом, чтобы передохнуть, и пересчитал собранные грибы; оказалось, что он собрал

45 грибов. В это время прибежали внучата — все с пустыми руками: ни один из них не нашел ни одного гриба.

— Дедушка, — просит один из них, — дай мне немного твоих грибов, может, это мне принесет счастье!

— И мне, дедушка!

— И мне дай!

Дедушка наделил каждого из них грибами, разделив между ними все свои грибы. Мальчуганы снова разбрелись по лесу и стали искать грибы, но не всем везло одинаково. Один мальчуган действительно нашел 2 гриба, другой же, наоборот, потерял 2 гриба, третий нашел столько, сколько получил от деда, а четвертый растерял половину полученных грибов. Когда мальчики вернулись домой, то оказалось, что у всех грибов поровну.

По скольку грибов получил каждый из мальчиков от дедушки и сколько каждый из них принес домой?

Нетрудно заметить, что третьему внуку дед дал грибов меньше всех, так как ему пришлось собрать еще столько же, сколько дал дед, чтобы у него их оказалось равное с братьями количество.

Для упрощения задачи предположим, что третьему внуку дед дал 1 горсть грибов. Сколько таких горстей он дал четвертому внуку?

Итак, третий внук принес домой 2 горсти, так как он сам собрал столько же грибов, сколько ему дал дедушка. Четвертый внук принес домой столько же грибов, сколько третий, то есть тоже 2 горсти; но надо помнить, что четвертый внук половину своих грибов растерял по дороге, отсюда следует, что он получил от деда 4 горсти.

Первый внук принес домой 2 горсти, но 2 гриба нашел сам, следовательно, дедушка дал ему 2 горсти без 2 грибов. Второй внук принес 2 горсти, а по дороге потерял 2 гриба — значит, он получил 2 горсти и еще 2 гриба.

Таким образом, дед дал внукам всего столько грибов: 1 горсть + 4 горсти + 2 горсти без 2 грибов + 2 горсти и 2 гриба, то есть всего 9 полных горстей. В 9 одинаковых горстях было 45 грибов, а в одной горсти $45 : 9 = 5$ грибов.

Итак, мы получили ответ: третьему внуку дед дал 1 горсть, то есть 5 грибов; четвертому дал 4 горсти, то есть $4 \cdot 5 = 20$ грибов; первому — 2 горсти без 2 грибов, то есть $2 \cdot 5 - 2 = 8$ грибов, и, наконец, второму дал 2 горсти и 2 гриба, то есть $2 \cdot 5 + 2 = 12$ грибов.

18. Первые проблески гениальности

Любопытный анекдот, относящийся к детским годам крупнейшего немецкого математика Карла Гаусса, приводят его биографы. Когда Карлу исполнилось семь лет, он был отдан в начальную школу. В этой школе арифметике обучал человек пожилой, известный своей строгостью. Зачастую, чтобы иметь возможность проверить упражнения учеников других классов, он давал мальчикам задание несколько более трудное, чем полагалось. Детвора должна была решать его самостоятельно в полной тишине. При этом было условлено, что каждый из учеников, решив задачу, относит тетрадь учителю и кладет ее на кафедру.

Однажды на уроке учитель продиктовал ученикам следующую задачу: «Найти сумму всех целых чисел от 1 до 40». Учитель был уверен, что бо́льшую часть урока ученики будут заняты подсчетом. Велико же было его удивление, когда через минуту после того, как было написано условие задачи на доске, он услышал веселый возглас: «Я уже решил!» Тотчас же перед учителем на кафедре очутилась тетрадь, подписанная: «Карл Гаусс».

Разгневанный учитель, думая, что это просто ученическая шалость, буркнул под нос, не прерывая своей работы: «Я отучу тебя, сорванец, от подобных штучек. Подожди только!»

А тем временем Карл, довольный и уверенный в себе, вернулся на свое место и стал ждать, когда учитель начнет править работы. Наконец, после долгих вычислений, все ученики снесли на кафедру свои тетради. Учитель принялся их править. Большинство учеников, несмотря на долгие подсчеты, получили ошибочный результат, и только в тетради Гаусса было всего одно число, и оно было правильное... Маленький Гаусс, услышав задачу, продиктованную учителем, мгновенно сообразил, как она решается. Вот схематически представленный процесс рассуждений, который мелькнул в гениальной детской головке:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots & , & 20 \\ 40, & 39, & 38, & \ldots & , & 21 \\ \hline 41, & 41, & 41, & \ldots & , & 41 \end{array}$$

Наибольшее и наименьшее числа ряда в сумме дают 41. То же самое получим, складывая второе число ряда с предпоследним, тот же результат получим, складывая третье по порядку число с третьим с конца числом, и т. д. Сумма каждой такой пары чисел всегда равна 41 и повторяется 20 раз. После всех этих рассуждений мальчик быстро умножил в уме $20 \cdot 41$ и написал в тетради только одно число: 820. Учитель был человек разумный. Он понял, что перед ним ребенок с удивительными способностями, и занялся им с большим энтузиазмом, но вскоре должен был констатировать, что ученик уже ничему не может научиться у своего учителя.

19. Правильный раздел вознаграждения

Два араба пробирались через пустыню. До ближайшего оазиса оставалось еще полдня пути. Из запасов продовольствия у них осталось только 8 сухарей: у одного было 3 сухаря, а у другого — 5. По дороге им встретился одинокий путешественник, истощенный от голода. Они сжалились над ним и поделились с ним своими запасами. Прощаясь, путешественник в знак благодарности вручил своим случайным попутчикам 8 одинаковых золотых монет.

Как два араба должны были разделить между собой дарованные им деньги?

При разделе дело дошло до ссоры, так как араб, у которого было 5 сухарей, потребовал себе 5 золотых монет, а его товарищ хотел получить 4 монеты, справедливо утверждая, что они оба приняли участие в спасении голодного богача. Так и не сумев договориться о способе раздела, они решили по прибытии в оазис обратиться к кадию, местному судье, с просьбой разрешить их спор. Судья решил этот спор неожиданным для них образом.

— Вы оба ошибаетесь, — сказал с усмешкой кадий. — Допустим, что каждый сухарь вы разделили на 3 части; таким образом, получилось бы 24 части. Предположим далее, что каждый из вас съел по 8 частей. Тот из вас, который имел 5 сухарей, то есть 15 частей, отдал третьему путешественнику 7 частей, а его товарищ из своих 3 сухарей уделил ему только 1 часть. Отсюда следует, что монеты должны быть разделены следующим образом: 7 монет полагается одному из вас, и только одна — другому.

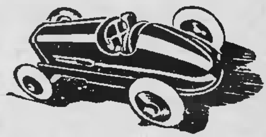
20. Регулярная езда

Некий автомобилист принимал участие в соревновании на регулярность езды. По правилам он должен был проехать некоторое расстояние со средней скоростью

48 *км/час*. Вместо этого половину дороги он гнал машину со скоростью 60 *км/час*. На сколько километров в час он должен уменьшить скорость езды во вторую половину дороги, чтобы средняя скорость была равна 48 *км/час*?

Если читатель думает, что вторую половину дороги автомобилист должен будет ползти со скоростью 36 *км/час*, то он ошибается, хотя $\frac{60+36}{2}=48$.

Предположим, что все расстояние равно 120 *км*. Для того чтобы его проехать, автомобилист располагает запланированными $120:48=2\frac{1}{2}$ часа — ни больше, ни меньше. Так как первую половину этого расстояния, то есть 60 *км*, он проехал за 1 час, то на вторую половину дороги ему осталось $1\frac{1}{2}$ часа — значит, это расстояние он должен проехать со скоростью $60:1\frac{1}{2}=40$ *км/час*. Решим эту задачу в более общем виде. Предположим, что длина всей дороги равна $2d$ и что автомобилист проехал первую половину дороги со скоростью v_1, а вторую половину дороги со скоростью v_2. Определим, какова была средняя скорость v его езды.



В первую половину дороги автомобилист использовал время $\frac{d}{v_1}$, а во вторую половину $\frac{d}{v_2}$, значит, вся дорога отняла у него время $\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}$.

С другой стороны, на дорогу $2d$ при езде со скоростью v необходимо время $\frac{2d}{v}$. Составляем уравнение: $\frac{2d}{v}=\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}$; после того как мы сократим все члены уравнения на d и разделим на 2, получим следующее равенство: $\frac{1}{v}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$.

Оказывается, что обратная величина скорости v — это средняя арифметическая между обратными величинами скоростей v_1 и v_2. В этом случае мы говорим, что скорость v — это среднее гармоническое для величин v_1 и v_2.

В нашей задаче приведены данные: $v = 48$ и $v_1 = 60$, остается определить v_2. Из вышеприведенного уравнения получаем $\frac{1}{v_2} = \frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}$; подставляя величины $v = 48$, $v_1 = 60$, имеем $\frac{1}{v_2} = \frac{2}{48} - \frac{1}{60} = \frac{1}{40}$, отсюда $v_2 = 40$.

21. Ловкие туристы

В баре у стен стояло четыре стола. В бар вошли туристы (21 человек), они возвращались из экскурсии и очень проголодались. Туристы заказали обед и пригласили хозяина пообедать с ними. Все разместились за столами таким образом, что за тремя столами сели туристы, по семь человек за каждым столом, а за четвертый сел хозяин (рис. 14). Туристы в шутку предложили хозяину, что платить за всех будет тот, кто при пересчете окажется последним. Хозяин неосмотрительно согласился. Стали всех подряд пересчитывать по ходу часовых стрелок, считая также и хозяина. Каждый седьмой освобождался от уплаты и покидал бар. Последним, к своему неудовольствию, оказался сам хозяин.

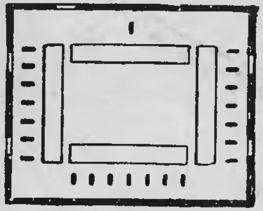


Рис. 14

С кого начали счет?

Решим эту задачу «с конца». Для облегчения расчета можно использовать кости домино, спички или монеты.

Пусть монета *22* (рис. 15) обозначает хозяина, который один останется в баре после «пересчета» всех его гостей. Раскладываем монеты *21* и *20* так, как указано на рисунке 15.

Начав с монеты *20*, будем считать в направлении, обратном движению часовых стрелок:

7	6	5	4	3	2	1
20	*22*	*21*	*20*	*22*	*21*	*20*

Число 1 упало на монету *20*; продвигаясь в том же направлении и дальше, кладем монету *19* (в пустой кружок на рисунке 15).

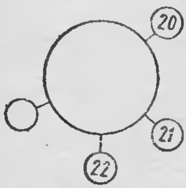


Рис. 15

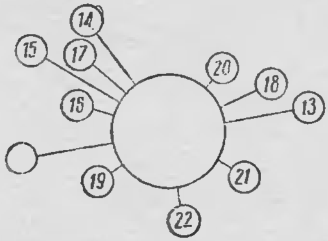


Рис. 16

Постепенно таким же образом раскладываем новые монеты.

На рисунке 16 видно, что уже уложена монета *13*. Считаем в обратном направлении, начиная с числа 7 и монеты *13*:

7	6	5	4	3	2	1
13	*18*	*20*	*14*	*17*	*15*	*16*

После монеты *16*, на которую выпало число 1, кладем монету *12* (в пустой кружок на рисунке 16). Когда мы выложим таким образом на стол все монеты, они расположатся в определенном порядке (рис. 17).

Но это еще, увы, не конец нашим трудным вычислениям; нужно еще раз отсчитать семь монет, чтобы определить то место, с которого была начата жеребьевка:

7	6	5	4	3	2	1
1	*4*	*14*	*17*	*15*	*16*	*6*

Оказывается, жеребьевка была начата с места, обозначенного номером *6*.

А как можно проще решить эту задачу?

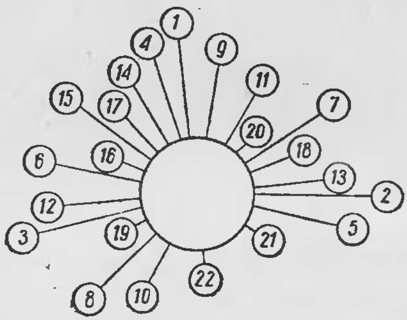
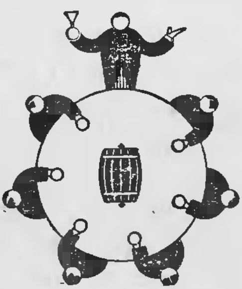


Рис. 17

22. Неосмотрительное гостеприимство

В старинной математической книге Г. Гарсдерфера «Математические развлечения» приведена следующая задача.



Некий человек, приглашая своих шестерых приятелей, настаивал, чтобы они пообещали прийти к нему на ужин столько раз подряд, сколько раз они вместе с ним смогут изменить порядок занимаемых ими мест за круглым столом. Сколько лет ежедневно будут посещать эти приятели гостеприимный дом неосторожного хозяина?

Приглашение полностью будет исчерпано только через тринадцать с чем-то лет!..

Это подсчитать нетрудно, зная, что для 7 «элементов», которыми в данном случае являются сотрапезники, существует $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ перестановок, что равно 5040.

Какой совет следовало бы дать этому опрометчивому хозяину, если бы он обратился к нам с просьбой спасти его от разоряющего обязательства? Ему нужно было бы посоветовать к этому условию добавить две довольно простые оговорки.

Прежде всего следовало бы отметить, что в счет не будет входить такая смена мест, которая будет представлять собой поочередное пересаживание всех на одно, два и т. д., вплоть до семи мест направо (или налево). Это уменьшит семикратно число обещанных ужинов, то есть с 5040 до 720. Кроме того, не следовало бы за новый порядок принимать и такую смену мест, при которой каждый сосед справа становится соседом слева. Это уменьшит число званых ужинов до 360.

Но почти год должен будет гостеприимный хозяин ежедневно принимать своих приятелей. Здесь уже даже математика не может ничем помочь.

23. Смышленые торговцы

Знаменитый Алкуин, друг Карла Великого, в своем труде «Задачи для подрастающего юношества» приводит следующую явно парадоксальную задачу.

Два торговца купили вместе стадо свиней и заплатили всего 100 монет, называвшихся сольдо. Когда они стали продавать свиней, то никто не хотел им дать больше, чем они заплатили сами, то есть больше, чем по 2 сольдо за 5 штук. Но как же продать свиней и ничего не заработать! Они посоветовались между собой и решили разделить стадо на две части. Так и сделали. А потом продали свиней по 2 сольдо за 5 штук, причем не только свои деньги вернули, но еще и кое-что заработали на этой сделке.

Как решить этот явный парадокс?

Торговцы разделили стадо следующим образом: один взял всех самых лучших свиней, а второй — всех поросят. Первый продавал по 2 свиньи за 1 сольдо, а второй — по 3 тоже за 1 сольдо.

Следовательно, они действительно продавали по той же цене, за которую купили, то есть 5 штук за 2 сольдо. Первый, продав 120 свиней, получил 60 сольдо, а второй за такое же количество свиней худшего сорта выручил только 40 сольдо, но вместе они выручили ту сумму, которую заплатили сами, то есть 100 сольдо, а в барыше им остался еще десяток свиней.

24. Транспорт с углем

На электростанцию прибыло 500 *т* угля в 18 вагонах. В вагонах было по 15, 20 и 30 *т* угля. Сколько вагонов было по 15, сколько по 20 и 30 *т*?

Если мы предположим, что было x вагонов по 15 *т*, y вагонов по 20 *т* и z вагонов по 30 *т*, то сможем составить два уравнения:

$$15x + 20y + 30z = 500,$$
$$x + y + z = 18.$$

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными. И все-таки мы можем решить эти уравнения, потому что неизвестные обозначают натуральные числа. Разделив все члены первого уравнения на 5, получим: $3x + 4y + 6z = 100$.

Умножив все члены второго уравнения на 6, имеем: $6x + 6y + 6z = 108$. А теперь выполним вычитание:

$$\begin{array}{r} 6x + 6y + 6z = 108 \\ -\ 3x + 4y + 6z = 100 \\ \hline 3x + 2y \qquad = \ \ 8 \end{array}$$

Мы получили уравнение $3x + 2y = 8$, которое в натуральных числах имеет только одно решение: $x = 2$, $y = 1$ (решение $x = 0$, $y = 4$ не будет верным, так как в этом случае совсем не было бы вагонов по 15 m). Теперь легко записать ответ:

2	вагона	по	15 m ...	30 m
1	вагон	с	20 m ...	20 m
15	вагонов	по	30 m ...	450 m
18	вагонов			500 m

25. В каком месте шоссе нужно ждать почту

На некотором расстоянии от шоссе, которое в этом месте идет прямолинейно, стоят две деревни. По шоссе проезжает почтальон. Сельские старосты договорились, что будут по очереди, через день, высылать посыльного за почтой. Посыльный же, получив почту, сначала отнесет корреспонденцию соседям, а потом с оставшейся корреспонденцией вернется в свою деревню. В каком месте шоссе должен находиться посыльный, чтобы самым коротким путем проделать эти переходы?

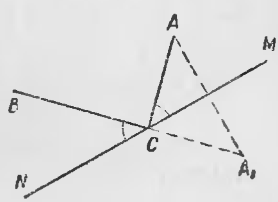


Рис. 18

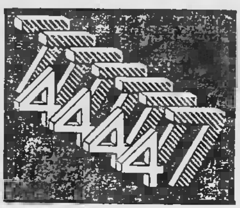
Эта задача не без практического значения, так как если предположить, что посыльный проделывает ежедневно хотя бы только по 100 $м$ напрасно, эта маленькая неточность за год составила бы $36\frac{1}{2}$ $км$.

Если мы обозначим шоссе линией MN, а близлежащие деревни точками A и B, то для определения на шоссе искомой точки нужно из точки A опустить перпендикуляр на MN и от точки пересечения C отложить $CA_1 = CA$, а затем прямой линией соединить B с A_1. Тогда точка пересечения этой линии с шоссе определит искомое место C (рис. 18).

Образно это можно представить себе так: предположим, что вдоль шоссе установлено огромное зеркало, обращенное в сторону деревень. Тогда посыльный, выходя из B, должен идти по прямой к отражению в зеркале деревни A, и наоборот: посыльный из A должен идти в деревню B, отраженную в зеркале. Тогда они оба достигнут искомого пункта C.

26. Выцветшие рукописи

Были найдены очень ценные старинные рукописи по математике, которые в результате плохого хранения так



сильно выцвели, что можно было различить только некоторые цифры. Цифры, которые нельзя прочесть, обозначим звездочками. На их место необходимо вставить цифры, которые были вписаны там первоначально, причем известно, что в первом ряду некогда было выполнено сложение, а во втором — вычитание.

$$\begin{array}{r} *\,8\,4\,* \\ 2\,*\,*\,3 \\ \hline 6\,5\,2\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,*\,5 \\ *\,*\,1\,7 \\ 5\,8\,*\,* \\ \hline *\,0\,8\,4\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,*\,1\,7 \\ *\,4\,*\,8 \\ \hline 6\,8\,1\,* \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\,*\,*\,7 \\ *\,3\,5\,* \\ \hline 6\,1\,7\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,*\,5\,7 \\ *\,9\,8\,* \\ \hline 4\,*\,6 \end{array}$$

Восстановление этих действий не представляет никакого труда. Куда труднее восстановить первичные числа в тех местах рукописи, где было выполнено умножение или деление:

```
      * * *
    × 4 5 7
    -------
    * * * *
  1 7 0 5
* * * *
-----------
* * * * * *
```

```
      * * * 3
    ×   * * *
    ---------
      * 7 0 *
    * 2 1 3
  * * * 9
  -----------
  * * * * * *
```

```
* * * * * * * | * * *
* * *         |-------
-----         | * * 8 *
3 0 2 *
* 6 9 5
-------
  * * 1 1
  3 * 8 *
  -------
    2 * 1 *
    * * * *
    -------
```

Еще хуже дело обстояло с двумя рукописями со стертыми буквами. Этот пример приводился американскими математиками. Первая известна под названием п р о б л е м ы ч е т ы р е х ч е т в е р о к, вторая — п р о б л е м ы с е м и с е м е р о к. Вот они:

```
* * * * * * 4 | * * *
  * * *       |-------
-------       | * 4 * *
  * * 4 *
  * * * *
  -------
    * * * *
      * 4 *
    -------
      * * * *
      * * * *
      -------
```

```
* * 7 * * * * * * * | * * * * 7 *
* * * * * *         |-------------
-----------         |   * * 7 * *
* * * * 7 * *
* * * * * * *
    ---------
    * 7 * * * *
    * 7 * * * *
    -----------
    * * * * * * *
    * * * * 7 * *
    -------------
        * * * * * *
        * * * * * *
        -----------
```

Проблема четырех четверок имеет четыре решения:

1 337 174:943=1418;
1 343 784:949=1416;
1 200 474:846=1419;
1 202 464:848=1418.

Проблема семи семерок имеет только одно решение, но найти его очень трудно: 7 375 428 413:125 473=58 781.

Еще одна найденная рукопись была до такой степени испорчена, что разобрать можно было только одну цифру:

```
* * * * * * * * * * |      ?
* * *               |---------------
-----               | * * * * * 8 * *
  * * *
  * * *
  -----
    * * *
    * * *
    -----
          * *
          * *
          ---
            * * *
            * * *
            -----
```

И все-таки удалось полностью восстановить всю запись! Цифра 8 в частном дает частичное двузначное произведение; отсюда делаем вывод, что делитель не может быть больше 12. Частичному трехзначному произведению может отвечать в частном только цифра 9, а в этом случае делитель не может быть меньше 12. Следовательно, делителем является число 12.

А теперь мы можем легко восстановить все цифры в записи деления, начиная с последнего частичного произведения и последней цифры частного:

```
1091889708 |    12
108        |----------
---        | 90990809
  118
  108
  ---
   108
   108
   ---
      97
      96
      --
       108
       108
       ---
```

27. Расшифровывание

Большое сходство с задачами на восстановление стертых цифр имеют задачи следующего типа:

$$
\begin{array}{r}
\times\;\; \mathrm{JCC} \\
\underline{\mathrm{JN}} \\
\mathrm{NTT} \\
\underline{\mathrm{JCC}} \\
\mathrm{JANT}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\;\; \mathrm{JNU} \\
\underline{\mathrm{NU}} \\
\mathrm{LNU} \\
\underline{\mathrm{NUS}} \\
\mathrm{OJNU}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
\mathrm{UEMA} & \mathrm{MA} \\ \cline{2-2}
\underline{\mathrm{MA}} & \mathrm{EMA} \\
\;\;\mathrm{TM} & \\
\;\;\underline{\mathrm{AS}} & \\
\;\;\mathrm{EMA} & \\
\;\;\underline{\mathrm{EMA}} &
\end{array}
$$

Буквы обозначают цифры; в каждой отдельной задаче одни и те же буквы обозначают одинаковые цифры, но не во всех трех вместе взятых задачах.

Такие задачи решаются относительно легко. Приводим ответы к трем вышеприведенным задачам:

$$144 \cdot 12 = 1728;$$
$$125 \cdot 25 = 3125;$$
$$3125 : 25 = 125.$$

Подобные задачи, даже более сложные и интересные, можно легко составить самим.

28. Переправа через ров

Четырехугольное поле окружено рвом всюду одинаковой ширины. В распоряжении имеются две доски, длина каждой из них равна ширине рва. При помощи этих досок нужно построить переход через ров.

Наглядное решение задачи дает рисунок 19.

Математическое обоснование возможности показанной на рисунке переправы дает следующее неравенство: $\sqrt{2} < 1\frac{1}{2}$. Если мы за единицу длины примем ширину рва, то расстояние AB будет выражено числом $\sqrt{2}$, то есть оно будет равно приблизительно 1,414. Длина доски точно равна ширине рва, следовательно, она должна быть выражена числом 1. Если у угла B мы положим одну доску наискось, то получим прямоугольный равнобедренный треугольник BCD, сторона доски CD будет отстоять от угла A на $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, то есть на 0,914 единицы длины. Отсюда делаем вывод, что на этой доске можно уложить другую доску, достающую до угла A; чтобы опереться обеими концами у доски, еще останется 0,086 единицы длины (например, при трехметровых досках останется более 25 *см*).

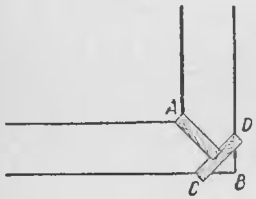


Рис. 19

29. Маневрирование поездов

I

Поезд B приближается к маленькому разъезду, но из-за повреждения паровоза он не может ехать с необходимой скоростью, и его нагоняет поезд A, который должен продолжать свой путь дальше. Отметим, что в этом месте железной дороги путь одноколейный. На разъезде от главной линии отходит боковая линия, так называемая тупиковая ветка, на которую можно завести поезд на некоторое время, но эта ветка настолько коротка, что не может целиком вместить ни один из поездов, которым необходимо разъехаться. Что нужно сделать, чтобы поезд A смог продолжать свой путь дальше?

На рисунке 20 изображена железнодорожная ветка вблизи разъезда.

По главной линии в направлении, обозначенном стрелкой, едет поезд B и сразу же за ним поезд A, который необходимо пропустить вперед. Тупиковая ветка, как мы уже отмечали, может вместить только часть вагонов поезда B. Какие маневры должны проделать поезда, чтобы пропустить вперед поезд A?

А вот решение.

Поезд B едет по главной линии, минуя въезд на тупиковую ветку. Затем дает задний ход, заводит в тупик и оставляет там столько вагонов, сколько их поместится. Оставшаяся часть поезда вместе с паровозом снова двигается вперед и удаляется подальше от въезда на тупиковую ветку. Следом за ним вперед продвигается поезд A;

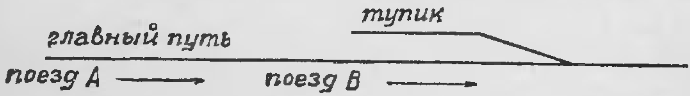


Рис. 20

как только он минует въезд на тупиковую ветку, к нему прицепляют находящиеся там вагоны поезда B, и поезд A уводит их из тупика, затем вместе с ними двигается назад, чтобы открыть путь к тупику остальной части поезда B. Когда таким образом главный путь будет открыт для поезда A, от него отцепляют вагоны поезда B, и поезд A следует дальше, к станции. А поезд B снова въезжает на главный путь, к нему прицепляют находящиеся там вагоны, и он медленно двигается вслед за поездом A.

Читатель может попробовать решить эту задачу иначе. Подумайте, можно ли было бы вместо поезда B разделить на две части поезд A?

II

На более крупном полустанке рядом с одинаковой линией имеется боковая ветка, которая не является тупиком: она с обоих концов соединена стрелками с главным путем.

К полустанку подъезжают два поезда: они движутся навстречу друг другу из противоположных направлений.

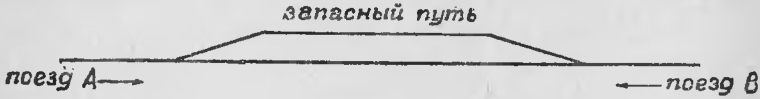


Рис. 21

Эти поезда должны разойтись на этом полустанке (рис. 21). Оба они значительно длиннее боковой ветки. Как разойтись этим поездам при наименьшем числе маневров?

III

Поезд, состоящий из паровоза P, товарных вагонов T и пассажирских вагонов O, находится на станции. На этой же станции имеются главный путь, боковая ветка и тупик S, в котором стоят товарные вагоны T_1 (рис. 22).

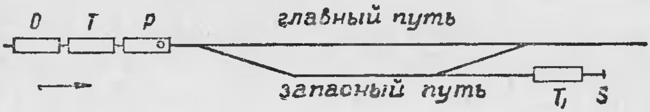


Рис. 22

Необходимо товарные вагоны поезда T перевести в тупик, а стоящие там вагоны T_1 прицепить на их место между O и P. Во время маневров ни на минуту нельзя оставить вагоны на главном пути без паровоза, так как ждут скорого поезда, для которого главный путь должен быть освобожден немедленно после получения сигналов о его приближении.

30. В окопах

На фронте в окопах перед самым носом неприятеля разместилось 9 солдат с офицером. Ввиду того что отряд занимал очень опасную позицию, офицер расположился на правом фланге. Однако по каким-то соображениям ему было необходимо занять самое крайнее место слева. Окоп так узок и тесен, что протиснуться позади солдат нечего было и думать. Наружу тоже нельзя высунуть голову, так как неприятель очень часто простреливает участок.

К счастью, в окопе имелись 3 углубления, в каждом из которых мог стать 1 человек.

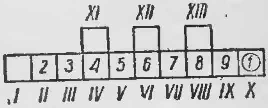


Рис. 23

Как должны меняться местами солдаты, чтобы офицер пробрался вдоль всего окопа и оказался слева в шеренге (рис. 23)?

Оказывается, солдаты и офицер должны будут не менее 28 раз поменяться местами. Вот схема этих перемещений:

2 — I	9 — VII	5 — VII	3 — III
3 — II	1 — XIII	1 — XI	4 — IV
4 — III	9 — X	4 — XII	5 — V
5 — XI	8 — IX	3 — VI	6 — VI
6 — IV	1 — XII	2 — V	7 — VII
7 — V	7 — XIII	1 — I	8 — VIII
8 — VI	6 — VIII	2 — II	9 — IX

А может быть, читателю удастся найти более короткий путь? Попытайтесь это сделать, начертив на бумаге соответствующие клетки и поместив в них кружки.

31. Гробница Диофанта

На могильном камне великого древнегреческого математика александрийской эпохи Диофанта виднелась надпись, составленная Евтропием:

«Путник! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в глубокой старости. Шестую часть своей долгой жизни он был ребенком, двенадцатую — юношей, седьмую — провел неженатым. Через пять лет после женитьбы у него родился сын, который прожил вдвое меньше отца. Через четыре года после смерти сына уснул вечным сном Диофант, оплакиваемый своими близкими. Скажи, если умеешь считать, сколько лет прожил Диофант?»

До женитьбы Диофант прожил $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}$ часть своей жизни, то есть $\frac{33}{84}$. Вместе с сыном он прожил половину своей жизни, то есть $\frac{42}{84}$ всей жизни. Остальная часть жизни, которая прошла от свадьбы до рождения сына и от смерти сына до смерти Диофанта, равна $\frac{9}{84}$ и составляет $5+4=9$ лет. Следовательно, Диофант умер 84 лет.

32. Кот и крыса

Индийская задача VII века

Кот взобрался на стену высотой 4 локтя и отсюда заметил крысу, которая находилась в месте, расположенном в 8 локтях от основания стены. Крыса тоже заметила кота и устремилась к своему укрытию, находящемуся в фундаменте стены. Кот соскочил со стены и проделал по диагонали в воздухе тот же самый путь, который крыса пробежала по земле. Ему удалось схватить крысу. В каком месте кот поймал крысу и какое расстояние пробежал четвероногий охотник, а какое крыса? Пусть читатель постарается ответить на этот вопрос, если он знаком с вычислением окружности.

Обозначим через A и C точки, в которых первоначально находились кот и крыса, AB — отвесную стену, BC —

расстояние по горизонтали, отделяющее крысу от стены, O — место, в котором кот настиг крысу (рис. 24). Тогда $AO = OC$. Точка O, местоположение которой нужно определить, является центром окружности, проходящей через точки A и C.

Пусть D будет той точкой, в которой окружность пересекает линию BC.

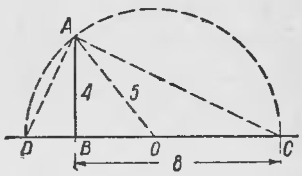


Рис. 24

Треугольник CAD, как вписанный в полуокружность, будет прямоугольным, а в прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, является средней геометрической отрезков этой гипотенузы: $AB^2 = BD \cdot BC$, то есть $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{4^2}{8} = 2$. Отсюда предполагаем, что $DC = 2+8 = 10$, $OC = 5$ и $OB = 3$.

Следовательно, крыса перед роковой для нее встречей пробежала расстояние в 5 локтей.

33. Сломанный бамбук

Бамбуковый тростник 32 локтей в высоту (рис. 25), росший на равнине, был в одном месте сломан ветром; его верхушка коснулась земли в 16 локтях от основания ствола. Скажи, искусный математик, на каком расстоянии от земли был сломан бамбуковый тростник?

Предположим, что тростник был сломан на расстоянии x локтей от земли (рис. 26). Из прямоугольного треугольника с катетами x и 16 и гипотенузой $32 - x$ мы выводим равенство:

$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2.$$

Это квадратное уравнение. Но x можно определить, не применяя обычных правил решения квадратных уравнений.

Выпишем полученное нами уравнение в следующем виде:

$$(32 - x)^2 - x^2 = 16^2.$$

На рисунке 27 мы построили квадрат $MNOP$, сторона которого будет равна $32 - x$. В нем мы поместим квадрат $SNQR$, сторона которого будет равна x, это можно сделать с полным основанием, так как из рисунка 25 явствует, что x меньше $32 - x$. Из нашего уравнения следует, что незаштрихованная часть квадрата $MNOP$ равна 16^2. Эта площадь состоит из двух прямоугольников: прямоугольника $MSRT$ со сторонами x и $32 - 2x$, а также прямоугольника $TQOP$ со сторонами $32 - x$ и $32 - 2x$.

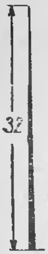


Рис. 25

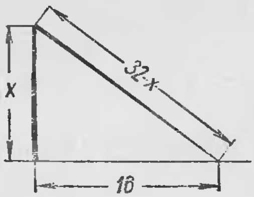


Рис. 26

Два этих прямоугольника можно заменить прямоугольником, высота которого будет равна $32 - 2x$, а основание $x + (32 - 2x)$, то есть просто 32.

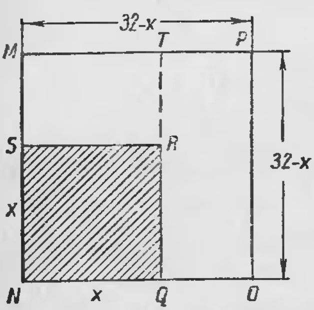


Рис. 27

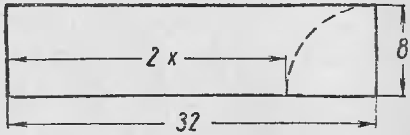


Рис. 28

Этот прямоугольник будет равнозначен квадрату 16×16, а тем самым будет равнозначен прямоугольнику 32×8. Из равенства прямоугольников с одинаковыми основаниями (равный каждый 32) можно заключить, что высота $32 - 2x$ и 8 должны быть равны; по рисунку 28 ясно видно, что $2x$ равны $32-8$, то есть 24; значит, x равен 12. Бамбук сломался на высоте 12 локтей от земли.

34. Стебель лотоса

На поверхности озера, посещаемого стаями фламинго и журавлей, плавает лотос, стебель которого на пол-локтя поднимается над водой. Гонимый ветром, стебель постепенно наклоняется, погружается в воду и в конце концов совсем исчезает под водой на расстоянии двух локтей от того места, где и вырос (рис. 29). Подсчитай, о мудрый математик, глубину озера, а результат проверь на странице 479.

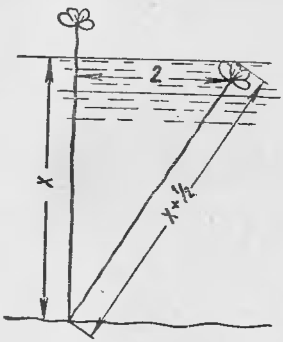


Рис. 29

Некоторой разновидностью вышеприведенной задачи, правда более сложной по своему содержанию, является следующая старинная китайская задача.

Посреди небольшого квадратного пруда, сторона которого равна 10 футам, растет куст водяных лилий; цветы поднимаются над поверхностью воды на 1 фут. Если их наклонить к середине какого-либо берега, то они скроются под водой. Какова глубина этого пруда?

35. Прыжок обезьяны

На дереве сидели две обезьяны: одна на самой верхушке дерева, другая — на высоте 10 локтей от земли. Второй обезьяне захотелось напиться воды из источника, находящегося на расстоянии 40 локтей, и она слезла с дерева; за то же время первая обезьяна соскочила с вершины дерева прямо к тому же источнику; ее прыжок был проделан по гипотенузе. Обе обезьяны преодолели одинаковое расстояние (рис. 30). Скажи быстро, мудрый человек, с какой высоты прыгнула обезьяна, и я увижу, как ты скор и точен в счете.

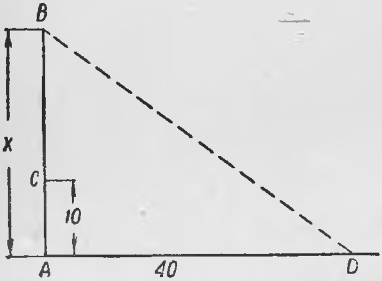


Рис. 30

36. Задача Леонардо Фибоначчи

Из «Книги об абаке», XIII век

Две башни, одна высотой 30 футов, а другая — 40 футов, расположены одна против другой в 50 футах друг от друга. Между ними находится фонтан, к которому с обеих башен слетают две птицы и, летя с одинаковой скоростью, опускаются к фонтану в одно и то же время. Каково же расстояние по горизонтали, отделяющее фонтан от двух башен (рис. 31)?

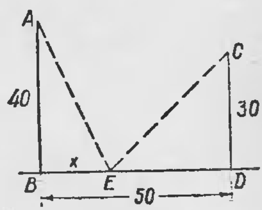


Рис. 31

Решается эта задача легко. Каков ход решения?

37. Знаменитая задача Люка

На одном научном конгрессе во время завтрака, на котором присутствовало много известных математиков из разных стран, французский математик Эдуард Люка объявил собравшимся коллегам, что он хочет предложить им один из самых трудных вопросов: «Предположим, что ежедневно в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется корабль и в то же самое время корабль той же компании отправляется из Нью-Йорка в Гавр. Переезд как в ту, так и в другую сторону совершается ровно 7 дней. Сколько кораблей этой компании, идущих в противоположных направлениях, встретит корабль, отправляющийся сегодня в полдень из Гавра?»

Некоторые из присутствующих, знаменитости в области математики, рассказывает об этом случае Люка в своей «Занимательной математике», недолго думая, воскликнули: «Семь!» Большинство же хранило молчание. Никто не дал правильного ответа. Однако, если воспользоваться графиком движения кораблей, изображенным на приведенном ниже рисунке 32, то решение тогда предстало бы с полной ясностью, наглядно и убедительно. Присутствующие при решении задачи Люка учитывали только те суда, которые должны были отправиться в путь, забывая о тех, которые уже были в пути.

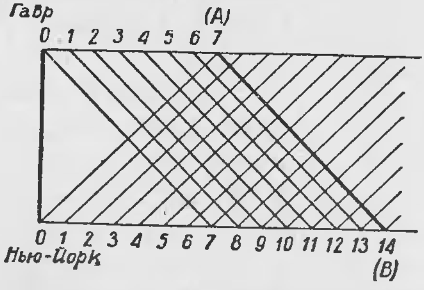


Рис. 32

Чертеж наглядно показывает, что судно, путь которого изображает линия AB, встретит в море 13 кораблей, а кроме того, еще два — один, прибывший в Гавр в момент его отъезда, и один, отбывающий из Нью-Йорка в момент его прибытия туда. Таким образом, всего он встретит на своем пути 15 кораблей. Одновременно график показывает и то, что суда будут ежедневно встречаться в полдень и полночь.

Если бы кто-нибудь стал сомневаться в пользе решения задач при помощи графиков, то вышеприведенное решение данной задачи должно разрешить подобное сомнение. Сложная задача в таком освещении становится простой и совершенно очевидной.

38. Паук и муха

Комната в длину имеет 30 футов, в ширину 12 футов, а в высоту тоже 12 футов. На вертикальной линии, которая проходит через середину одной из более коротких стен, на расстоянии одного фута от потолка, находится паук; на перпендикуляре, проходящем через середину противоположной стены, на расстоянии 1 фута от пола находится муха. Паук настигает муху, которая, обессилев от страха, даже и не пытается спастись.

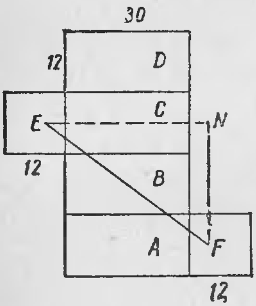


Рис. 33

Необходимо отыскать самый кратчайший путь, который проделает паук, настигая свою добычу. Быстрее всего эту задачу можно решить графическим путем. Вот диаграмма, отвечающая решению этой задачи (рис. 33). Прямоугольник A обозначает пол, B и D — более длинные боковые стены, C — потолок, E и F — точки на обеих стенах, в которых первоначально находились паук и муха.

Если линию EF, по которой пробежал паук, примем за гипотенузу прямоугольного треугольника EFN, тогда, конечно, $EF^2 = NF^2 + NE^2$. Но расстояния NF и NE легко вычислить: они равны 24 и 32 футам. Отсюда $EF = 40$ футам.

39. Таинственные номера телефонов

Некий венский математик попросил знакомую молодую девушку, чтобы та дала ему свой номер телефона. Девушка, не очень желая этого, ответила шутливо, что в том учреждении, в котором она работает, есть четыре телефона; в каждом номере телефона цифры разные, но эти четыре номера обладают одной общей особенностью: сумма цифр каждого номера равна 10, а если к каждому из этих номеров прибавить номер, состоящий из тех же самых цифр, записанных в обратном порядке, то получим четыре совершенно одинаковых числа, состоящих из одинаковых цифр.

— Этого для вас будет достаточно, — закончила она с несколько злорадной улыбкой и попрощалась.

Она была уверена, что по таким слишком общим данным будет трудно разгадать номера телефонов. Однако все получилось совершенно иначе, и, к великому удивлению насмешницы, вскоре по одному из телефонов она услышала голос докучливого знакомого.

Каким образом он смог отгадать эти таинственные номера?

Этот математик знал, что все венские телефоны имеют номера от 20 000 до 99 999.

Предположим, что один из телефонов учреждения имеет номер $ABCDE$; буквы означают последовательные цифры. Согласно условию задачи, сумма данного номера и номера с обратным порядком цифр должна быть числом, состоящим из «одинаковых цифр»:

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ + \; EDCBA \\ \hline FFFFF \end{array}$$

А это возможно только в том случае, если $E + A = A + E = F$, $D + B = B + D = F$ и $C + C = F$.

Кроме того, мы знаем, что $A + B + C + D + E = 10$; отсюда заключаем, что $F = 4$ и $C = 2$.

Цифра A может быть равна 3 или 4. Теперь легко выписать номера четырех телефонов:

30 241, 34 201, 41 230, 43 210.

40. Ежи и черепахи

Два ежа устроили соревнование. Один на своем пути не встретил никаких препятствий, зато другой по дороге встретил двух огромных черепах. Ничего другого не оставалось, как обойти их или пробежать по ним. Еж решился пробежать по ним. Первая черепаха, длиной 1 *м*, двигалась в направлении, противоположном ежу, проделывая 6 *см* в течение секунды; а другая, поменьше, длиной $\frac{1}{2}$ *м*, двигалась в том же направлении, что и еж, со скоростью 18 *см* в секунду.

Оба ежа пришли к финишу одновременно. Как определить, который из них был лучшим бегуном? Первая черепаха, конечно, задержала ежа, так как за время, пока он пробегал по ее спине, а это продолжалось какие-то t секунд, черепаха проделала в противоположном направлении $6t$ сантиметров. По второй черепахе еж пробежал за время $\frac{1}{2}t$ секунд и в течение этого пробега выиграл некоторое расстояние, так как черепаха несла его вперед: он выиграл $18 \cdot \frac{1}{2}t = 9$ *см*. Всего же на обеих черепахах еж выиграл $3t$ сантиметров. Следовательно, лучшим бегуном оказался тот еж, который не встретил на своем пути никаких препятствий.

41. Самый выгодный способ посадки картофеля

Чтобы получить максимальный урожай картофеля, его нужно сажать через некоторые равные промежутки, как это предписывается наукой, опирающейся на многолетний опыт. Вопрос заключается в том, как выгоднее всего разместить на поле лунки. И тут могут сказать свое слово не только агрономы, но и математики.

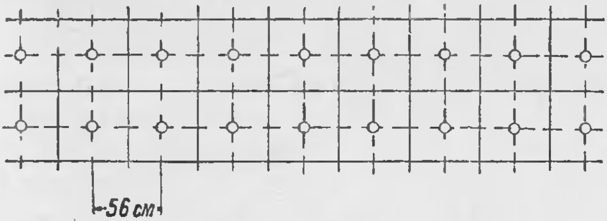


Рис. 34

Как известно, существуют три многоугольника, на которые можно разбить площадь без пробелов и перерывов: равнобедренный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Итак, только эти три типа взаимного размещения лунок картофеля можно брать во внимание. При применении шестиугольника земля не будет (из-за необходимого постоянного расстояния между лунками) использована в полной мере, это почти очевидно. Сомнения могут возникнуть только при выборе квадрата или треугольника. В центре каждого из этих многоугольников поместим одно растение, причем размеры многоугольников подберем таким образом, чтобы расстояние между самыми близкими растениями было предписанных размеров, например $d = 56$ *см.* (Если кто-нибудь пожелает проделать вычисления для иной величины d, то это не будет сложнее, чем в данном, разбираемом нами случае.)

При посадке картофеля в квадрат, как показано на рисунке 34, мы должны разместить ряды на расстоянии

56 *см* и в каждом ряду сажать картофель тоже на расстоянии 56 *см* друг от друга. Тогда на каждое растение придется $56 \cdot 56 = 3136$ *см*^{2} грунта, а на одном аре (10×10 *м*) можно будет разместить $1\,000\,000 : 3136 = 319$ лунок.

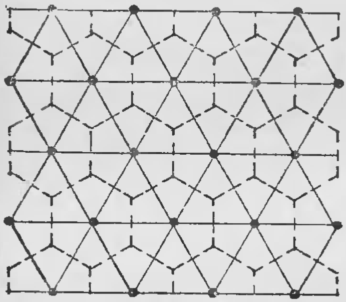


Рис. 35

Еще разберем способ посадки картофеля в вершинах равнобедренных треугольников (рис. 35).

При таком способе посадки на каждое растение придется правильный шестиугольник, в котором расстояние от центра до граней будет равно 28 *см*. Этот правильный шестиугольник можно разбить на 6 равнобедренных треугольников.

Высота каждого из таких треугольников будет равна 28 *см*, а сторона, как это легко определить,— около 32 *см*. Площадь такого маленького треугольника будет равна $\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 28 = 448$ *см*^{2}, а весь правильный шестиугольник займет $6 \cdot 448 = 2688$ *см*^{2}. На одном аре можно разместить $1\,000\,000 : 2688 = 372$ лунки, то есть больше, чем при посадке квадратом.

42. Как без всяких приборов можно определить, на каком расстоянии расположен предмет известных нам размеров

Предположим, что мы отошли от палатки, лагеря или дома, ширина и длина которых нам известны, и хотим проверить, как далеко мы удалились. Или же возвращаемся с экскурсии и, увидев издалека дом или палатку, желаем узнать, сколько нам еще осталось идти. Не имея с собой никаких приборов, прибегаем исключительно к помощи рук и глаз. Вытягиваем правую руку и, прикрыв левый глаз, устанавливаем конец указательного пальца на левой стороне дома; затем, стараясь удержать руку в полной неподвижности, быстро закрываем правый глаз и открываем левый; в этот момент конец пальца явно передвинется к правой стороне и остановится, например, в центре, на середине фронтона дома. Этого подмеченного нами явления уже достаточно, чтобы — приблизительно, конечно, очень и очень приблизительно — определить искомое расстояние.

Длина нашей руки от пальцев до глаза, по всей вероятности, нам известна достаточно точно; допустим, она равна 80 *см*. Расстояние между нашими зрачками или известно, или, по крайней мере, может быть известно; предположим, что оно равно 7 *см*. Если, кроме того, нам известно, что ширина дома равна 20 *м*, то половина этой величины, то есть 10 *м*, является последним членом пропорции, в которой x означает искомое расстояние:

$$0{,}07 : 10 = 0{,}8 : x.$$

Из этой пропорции находим:

$$x = \frac{0{,}8 \cdot 10}{0{,}07} = \approx 115 \ \textit{м}.$$

Как была составлена эта пропорция, до этого, пожалуй, легко додумается каждый.

43. Форма зрительного зала

Какой формы должен быть театральный зал, чтобы зрители, сидящие вдоль его стен, со всех мест видели сцену под одним и тем же углом?

Пусть отрезок AB означает сцену (рис. 36). Из точки A проведем прямую AC так, чтобы угол BAC был равен 53°.

Этот угол признан самым подходящим, чтобы удобно видеть всю сцену. Из точки A проводим прямую AD, перпендикулярную к прямой AC, и через середину M отрезка AB проводим прямую MN, перпендикулярную к прямой AB. Точка O, то есть точка пересечения прямых AD и MN, будет центром окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой AC. Дуга ADB выразит искомую форму, которую нужно придать зрительному залу, так как в самом деле все углы, вершины которых лежат на этой дуге, а стороны проходят через точки A и B, будут равны углу ADB, а значит, и углу BAC, что вытекает из рассмотрения треугольника ABD, а именно: если прямая BE перпендикулярна к прямой AD, то $\angle ADB = \angle ABE = \angle BAC$.

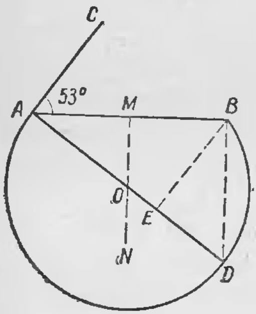


Рис. 36

44. Проделки подручного

На мельницу привезли 9 мешков зерна, занумерованных последовательно целыми числами от 1 до 9, и поставили их у степы. Когда мельник стал к ним присматриваться, он заметил, что совершенно произвольная расстановка дала интересные результаты. По краям стояло по 1 мешку, дальше по паре, а посредине 3 мешка рядом (рис. 37).

Рис. 37

Но что было еще интереснее: при умножении числа, написанного на левом мешке, стоящем отдельно, на число, которое образовывали цифры двух соседних мешков, в произведении получалось число, написанное на трех мешках, группа которых была расположена в центре: $7 \cdot 28 = 196$. Мельник очень удивился этой случайности, счел ее добрым предзнаменованием и решил испытать судьбу в лотерее, поставив на номер 728196.

Подручный предложил составить ему компанию, но мельник не согласился. Тогда веселый паренек решил сыграть с мельником шутку и ночью переставил мешки так, что по обе стороны ряда произведения чисел одного и двух мешков были равны числу в центре. Это была еще более удивительная комбинация. Мельник в большом волнении стал утром разглядывать мешки. Видит:

4 39 156 78 2.

Умножает: $4 \cdot 39 = 156$ и $2 \cdot 78 = 156$. Какое бы извлечь отсюда предзнаменование? Сразу же усомнился в успешности первого, неполного предсказания, ибо на этот раз необычного оказалось куда больше...

На следующий день иная расстановка мешков снова дает подобные результаты умножения. Можно ли еще продолжить подобные расстановки? На этот вопрос попробуйте ответить сами.

45. Удивительный ствол дерева

В лесных хозяйствах объем ствола срубленного дерева вычисляется таким образом, как если бы это был цилиндр, причем диаметр этого цилиндра измеряется посредине ствола дерева. Следовательно, если мы длину ствола дерева обозначим через h, а диаметр среднего поперечника — через d, то объем ствола можно определить по следующей формуле:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h, \quad \text{то есть} \quad V = 0{,}785 d^2 h.$$

Обычно берется округленная величина: $V = 0{,}8d^2h$.

Например, перед нами ствол дерева длиной 12 *м*. В утолщенной части ствола диаметр равен 0,8 *м*, а в конце, где ствол суживается, диаметр равен 0,2 *м*. Ствол суживается равномерно, как показано на рисунке 38.

Явился покупатель, желавший приобрести это дерево, и попросил определить его объем. Нетрудно заметить, что диаметр дерева посредине его ствола равен 0,5 *м*. Отсюда его объем

$$V = 0{,}8 \cdot 0{,}5^2 \cdot 12 = 2{,}4 \text{ м}^3.$$

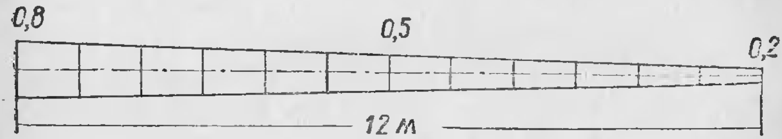


Рис. 38

Считая по 100 рублей за кубический метр, подсчитали, сколько причитается за дерево; оказалось, 240 рублей. Но в этот момент покупатель раздумал. Он заявил, что ему нужен ствол 10-метровой длины. Тогда от суживающегося конца ствола отпилили 2 *м*. Оставшаяся часть дерева имела длину $h = 10$ *м*, а диаметр среднего поперечника был равен $d = 0{,}55$ *м*. Был вычислен новый объем, который, очевидно, должен был быть меньше. Но по расчетам вышло:

$$V = 0{,}8 \cdot 0{,}55^2 \cdot 10 = 2{,}42 \text{ м}^3.$$

По той же самой цене 100 рублей за кубический метр ствол, урезанный на 2 *м*, стоил 242 рубля, то есть на 2 рубля больше, чем целое дерево. А ведь осталась еще часть дерева длиной 2 *м*, со средним поперечником 0,25 *м*. Объем этой части дерева равен

$$V = 0{,}8 \cdot 0{,}25^2 \cdot 2 = 0{,}1 \text{ м}^3,$$

следовательно, один только этот кусок стоит 10 рублей. Откуда эти чудеса?

Виновата формула, используемая для определения объема ствола дерева. Она неточна. Чтобы точнее определить объем дерева, нужно взять следующую формулу:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} \cdot h,$$

где d_1 и d_2 обозначают диаметр обоих концов дерева, а h обозначает длину дерева. По этой формуле весь ствол стоит 263,76 рубля, ствол урезанный — 253,82 рубля, а кусок отпиленного дерева — 9,94 рубля.

46. Находчивая сорока

Однажды знойным летом одной мудрой сороке очень захотелось пить. В саду она нашла вкопанную в землю жестяную детскую лейку, в которой было немного чистой воды. Но вода находилась в лейке слишком глубоко, и сорока, несмотря на все ухищрения, не могла до нее добраться.

«Вот если бы уровень воды поднять на четверть дюйма,— подумала сорока (она не была знакома с метрической системой мер), — я бы могла напиться холодной чистой воды».

Сорока все похаживала вокруг лейки и измеряла. Диаметр верхнего отверстия лейки был равен 1,5 дюйма, а диаметр дна — 3 дюймам. В высоту лейка имела 4,5 дюйма, но воды было налито не более чем на 2 дюйма.

Сорока вспомнила, что в дупле старого дерева у нее хранится сокровище — блестящие монеты, каждая монета толщиной 1 линия (линия — двенадцатая часть целого дюйма), а диаметром 16 линий. Значит, такая монета пройдет через отверстие лейки и попадет в воду.

Сорока стала летать к дуплу за монетами, приносить их и бросать в воду, каждый раз пробуя, может ли уже достать воду клювом. А мы между тем попробуем высчитать, сколько перелетов должна будет совершить сорока, прежде чем сможет утолить свою жажду.

Набросаем чертеж лейки (рис. 39). Отложим отрезок FD, равный отрезку AB; тогда прямая AF будет параллельна прямой BD. Вода была на уровне KM, а сорока хотела повысить уровень воды до NQ. Вычислим отрезки в линиях:

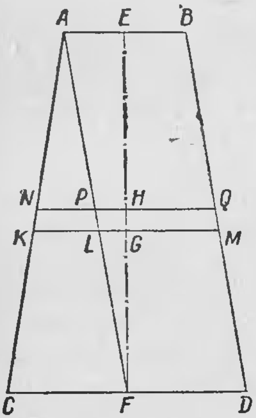


Рис. 39

$$CF = 18, \quad EF = 54,$$

$$EG = 30, \quad EH = 27.$$

Получим пропорции:

$$\frac{KL}{CF} = \frac{EG}{EF}, \quad \text{откуда } KL = 10.$$

$$\frac{NP}{CF} = \frac{EH}{EF}, \quad \text{откуда } NP = 9.$$

Собираем данные, необходимые для вычисления объема слоя, находящегося между уровнем KM и уровнем NQ:

$$d_1 = KM = 28, \quad d_2 = NQ = 27, \quad h = GH = 3,$$

и вычисляем объем по следующей формуле:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} \cdot h.$$

Объем слоя $KNQM$ приблизительно равен 1781 кубической линии, а объем одной монеты — 202 кубическим линиям; отсюда заключаем, что только девятая монета даст возможность сороке достать воду клювом, но, чтобы утолить жажду, сорока должна будет утопить в лейке еще и десятую монету.

47. Вагон с грузом легче порожнего

На некоторых железных дорогах встречаются специальные товарные вагоны в форме огромных цилиндров, предназначенные для перевозки газа. Такие вагоны обычно весят около 10 *т*, их емкость — 50 куб. *м*. Предположим, что вагон гружен водородом, кубический метр которого весит, если округлить, 100 *г*. Сколько будет весить вагон вместе с грузом?

Вагон, наполненный таким грузом, не только не будет весить больше, чем порожний, а, наоборот, будет легче. Чтобы наполнить вагон водородом, нужно сначала удалить воздух, 50 куб. *м* которого весят около 65 *кг*, а между тем 50 куб. *м* водорода весят около 5 *кг*. Следовательно, вагон станет легче на 65 — 5 = 60 *кг*.

48. Самые дешевые дрожки

Некий житель маленького городка был известен своей скупостью. Когда у него были дела в уездном городе, расположенном в 25 *км* от этого местечка, он обычно охотился на соседей, упрашивая подвезти его.

Но, как известно, на охоте бывает всякое. Однажды скупец крутился на площади этого городка в поисках того, кто бы его подвез за «спасибо» домой.

Но на этот раз никого не было.

Так как не оказалось отзывчивого соседа, он вынужден был взять платные дрожки. Он обошел всех извозчиков, торгуясь с ними и сравнивая запрашиваемые цены; один хотел 250, другой — 200, а третий — 150 рублей. Все эти цены показались скупцу слишком высокими. Наконец он заметил стоящего в стороне парня с убогими дрожками и жалкой клячей. Когда скупец спросил его, сколько он возьмет за дорогу, парень посмотрел в землю, почесал голову и, наконец, ответил:

— За первый километр заплатите мне копейку, пожалуй, это не будет слишком много. За второй уже две, так как дорога трудная, на третьем километре дорога идет в гору, поэтому заплатите мне четыре копейки, а затем и конь устанет, а гора еще велика, снова заплатите мне вдвое больше копеек, и так до самого конца пути.

«Вот глупый парень, — подумал горожанин, едва удерживаясь от смеха: — считает на копейки. Ну что ж, не мне учить его считать». Поспешно забрался в дрожки и крикнул:

— Согласен! Поехали!

Они отправились в путь, но когда добрались до городка, то оказалось, что скупой горожанин за дорогу должен был отдать «глупому» парнишке все хозяйство, все, что имел, да еще сам остался у него в батраках отрабатывать долг, так как самые дешевые дрожки обошлись ему ни больше ни меньше, как в 355 544 рубля 31 копейку.

Если не верите, проверьте: сами вычислите эту сумму, помня, что в геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8... сумма первых 24 членов равна 25-му члену, уменьшенному на единицу.

49. Кому сколько лет?

В семье было пятеро детей. Ясь вдвое старше Терезы. Нелле и Терезе вместе вдвое больше лет, чем Ясю. Славику и Ясю вместе вдвое больше лет, чем Нелле и Терезе. Вере, Нелле и Терезе вместе вдвое больше лет, чем Славику и Ясю. А Вере как раз исполнился 21 год. Сколько лет каждому из остальных детей?

Определить возраст можно легко, если за единицу возраста принять возраст Терезы. Обозначим его буквой t. Тогда Ясю будет $2t$ лет. Так как Нелле и Терезе вместе $4t$ лет — значит, Нелле будет $3t$ лет. Славику и Ясю вместе $8t$ лет, следовательно, Славику будет $6t$ лет. Вере, Нелле и Терезе вместе $16t$ лет; следовательно, Вере будет $12t$ лет. Мы уже знаем, что $12t = 21$ году, отсюда следует, что $t = 1\frac{3}{4}$ года. Дальнейшие вычисления пойдут уже гладко.

Заметим, что возраст трех самых младших детей, включая Неллю, представляет собой арифметическую прогрессию (с разностью год и девять месяцев) — эта прогрессия будет в силе и когда дети будут старше, — а возраст трех старших детей представляет собой геометрическую прогрессию, которая быстро становится недействительной.

50. Эмблема выставки

Была запроектирована выставка. Дирекция объявила конкурс на эмблему выставки.

Среди присланных проектов оказались два довольно похожих по замыслу.

В одном из этих проектов предлагалось, чтобы эмблемой выставки была пирамида, состоящая из поставленных друг на друга кубов: на громадном кубе, ребро которого $a = 25$ *м*, должен быть помещен куб с ребром на 20% меньше, а на нем — новый куб, ребро которого будет на 20% меньше ребра предыдущего куба, и т. д. (рис. 40).

Другой проект в основу пирамиды также предлагал поместить куб с ребром $a = 25$ *м*, на нем должен был бы находиться куб, ребро которого равно $\frac{1}{2}a$, а затем поочередно кубы с ребрами $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$ и т. д.

Которая из этих пирамид, построенных из кубов, будет выше?

Оказывается, что первая башня будет высотой 125 *м*. В самом деле, нужно вычислить сумму геометрического ряда:

$$25 + 25 \cdot \frac{4}{5} + 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ldots$$

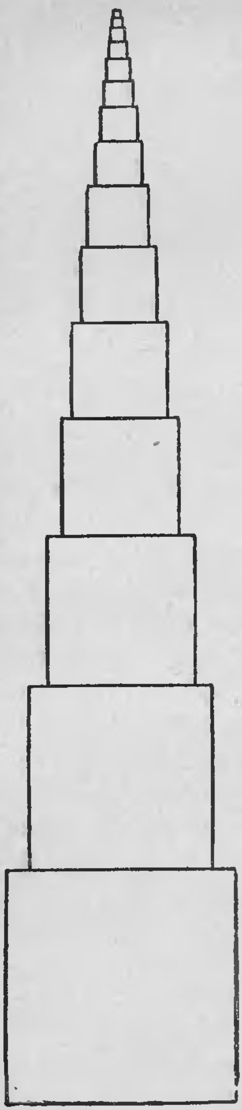


Рис. 40

Как известно, такая сумма определяется по следующей формуле: $S = \frac{a}{1-q}$, где a обозначает первое число геометрического ряда, q — его частное. В данном примере $a = 25$, $q = \frac{4}{5}$, следовательно, $S = 125$.

Для вычисления высоты второй башни нужно найти сумму следующего ряда:

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} + \frac{a}{5} + \ldots$$

Такой ряд называется *гармоническим рядом.* Это ряд расходящийся, так как сумма его членов, взятых в достаточном количестве, может превысить произвольно большое, наперед заданное число.

В этом легко убедиться путем довольно любопытного рассуждения. Члены этого ряда можно объединить в такие группы:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \\ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Если мы знаменатели всех дробей, находящихся в скобках, заменим общим знаменателем, наибольшим в данной скобке, то ряд примет следующий вид:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \\ + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Теперь его можно записать следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Сравнивая ряды:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots,$$

видим, что каждая скобка в первом ряду содержит большее выражение, чем соответствующая скобка во втором ряду. Но второй ряд расходящийся — значит, и первый ряд тоже расходящийся.

Итак, мы убеждаемся, что башню по этому проекту нужно было бы тянуть вверх до бесконечности, но по пути мы достигли бы такой высоты, при которой центробежная сила, вызванная вращением Земли вокруг своей оси, была бы больше силы притяжения Земли...

51. Сколько лет сыну, а сколько отцу?

Приблизительно около 20 лет назад в журнале «Параметр» была помещена следующая задача в форме диалога между отцом и сыном.

Сын: «Папа, сегодня первый день нового года, мой и твой день рождения. Знаешь, папочка, сумма цифр нового года составляет как раз столько, сколько мне сегодня исполнилось лет, а в прошлом году так не было. А у тебя случалось когда-нибудь такое же совпадение?»

Отец (после некоторого раздумья): «Нет, у меня такого совпадения не было».

Сын: «В каком году ты родился?»

Отец: «Так как ты любишь загадки, скажу тебе только одно, что сумма цифр моего года рождения делится на 9».

В каком году родился отец, а в каком — сын? Когда происходил этот разговор?

Вот решение.

Обозначим числом n тот год, в который впервые произошло такое совпадение, что возраст сына был равен сумме цифр числа n. Если от числа n отнять возраст сына, то мы получим год его рождения. Но разность какого-либо числа и суммы его цифр всегда делится на 9. Отсюда предполагаем, что год рождения сына делится на 9. Это не мог быть ни 1935, ни 1926 год, так как для этих лет совпадение наступило бы только в 1950 или в 1940 году. Значит, это был 1917 год, а совпадение произошло в 1930 году (действительно, «несколько лет назад»). Это совпадение повторялось в течение целого десятилетия, вплоть до 1939 года.

Не каждый год рождения, делящийся на 9, предопределяет, что произойдет совпадение возраста с суммой цифр календарного года; отец и вправду родился в году, делящемся на 9, но ему такое совпадение не выпало. В XIX веке был только один такой год — 1881. Если человек родился в 1881 году, то до 1899 года его возраст все время был меньше суммы цифр календарного года, а с 1900 года все время больше.

Итак, отец родился в 1881, а сын — в 1917 году. Разговор происходил 1 января 1930 года.

52. Разные задачи

I

В одном дворе, повествует старинная китайская задача, находились кролики и куры. Всего было 35 голов и 94 ноги. Сколько было кур, а сколько кроликов?

Эта задача довольно легко решается алгебраическим путем.

II

Уже упоминавшийся нами Алкуин является автором следующей задачи.

Борзая мчится за зайцем, которого отделяет от нее расстояние в 150 футов. Прыжок зайца равен 7 футам, прыжок борзой за то же время равен 9 футам.

Во сколько прыжков борзая догонит зайца?

III

Старая легенда повествует, что чешская королевна Либуше обещала свою руку тому из трех добивавшихся ее руки рыцарей, кто первый решит задачу следующего содержания.

Сколько слив помещается в корзинке, из которой половину всего содержимого и одну сливу она отдаст первому, половину оставшихся и еще одну сливу — второму и, наконец, третьему — половину оставшихся и три сливы, после этого корзинка опустеет.

IV

Пруд зарастает ряской. Каждые два дня пространство, заросшее ряской, удваивается. Весь пруд покрылся ряской в течение 64 дней. За сколько дней заросла ряской четверть пруда?

II. ИНТЕРЕСНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

1. Удивительные свойства семерки и девятки

Если арифметическую прогрессию, первым членом и разностью которой является число 15 873, будем умножать на 7, то получим очень странные произведения. Числа 15 873, 31 746, 47 619, 63 492, 79 365, 95 238, ..., 142 857, умножаемые на 7, всегда дают число, состоящее из шестикратно повторенной одной и той же цифры:

$$15873 \cdot 7 = 111111$$

$$31746 \cdot 7 = 222222$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$79365 \cdot 7 = 555555$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

Это любопытное сочетание цифр можно легко объяснить, если заметить, что $79\,365 \cdot 7 = (5 \cdot 15\,873) \cdot 7 = 5 \cdot (15\,873 \cdot 7) = 5 \cdot 111\,111$.

Значительно труднее объяснить следующее необычное явление: если между двумя цифрами второй степени числа 7, следовательно между цифрами числа 49, будем вставлять число 48, то составленные таким образом числа, а именно:

$$49, \quad 4\,\underline{48}\,9, \quad 44\,\underline{48}\,89, \quad 444\,\underline{48}\,889, \ldots$$

всегда будут полными квадратами:

$$49 = 7^2$$
$$4489 = 67^2$$
$$444889 = 667^2$$
$$44448889 = 6667^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Еще более любопытные «чудеса» можно получить, если комбинировать число 7 с числами 11 и 13 или же — кому что нравится — с числом 143, равным $11 \cdot 13$.

Итак, если мы умножим число 143 на какое-нибудь из 999 нервых в натуральном ряду чисел, кратных 7, то в произведении всегда будем иметь число, состоящее из двух одинаковых чисел, например:

$$28 \cdot 143 = 4004$$
$$315 \cdot 143 = 45045$$
$$2464 \cdot 143 = 352352$$
$$3591 \cdot 143 = 513513$$
$$5495 \cdot 143 = 785785$$
$$6993 \cdot 143 = 999999$$

При этом следует обратить внимание на то, что повторяющееся в произведении число всегда равно числу семерок, заключенному во множимом. В самом деле:

$$28 : 7 = 4$$
$$315 : 7 = 45$$
$$2464 : 7 = 352$$

и так далее.

Это удивительное на первый взгляд явление объясняется чрезвычайно просто. Достаточно заметить, что $7 \cdot 143 = 1001$. Поэтому $2464 \cdot 143 = (352 \cdot 7) \cdot 143 = 352\,(7 \cdot 143) = 352 \cdot 1001 = 352 \cdot 1000 + 352 = 352\,352$.

Подобные же результаты можно получить, умножая 77 на 999 первых кратных числа 13 или же умножая 91 на 999 первых кратных числа 11.

И в заключение приведем небольшой математический фокус: как записать 7 при помощи двоек? $7 = 2 + \frac{2}{2} + 2 + 2$.

А вот еще более интересная, «новая» запись 7:

$$7 = 3^2 - 2$$
$$7 = 2^3 - \frac{2}{2}$$
$$7 = 2^{2^2} - 3^2$$
$$7 = 3^3 - 2^2 - 2^{2^2}$$

Так как нам пора перейти от удивительных свойств семерки к подобным же свойствам девятки, то между этими наиболее интересными числами вместо пограничного столба поставим следующую пирамидку произведений:

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$99 \cdot 77 = 7623 = 7623$$
$$999 \cdot 777 = 776223 = \overline{7}76\overline{2}23$$
$$9999 \cdot 7777 = 77762223 = \overline{77}76\overline{22}23$$
$$99999 \cdot 77777 = 7777622223 = \overline{777}76\overline{222}23$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ставя таким образом перед шестеркой соответствующее число семерок, всегда на одну меньше, чем насчитывает множимое и множитель девяток или семерок, а перед тройкой вставляя такое же число двоек, можем записать произведение, полученное от умножения произвольного числа девяток на такое же число семерок.

Девятка очень приятная цифра, особенно для тех, кому с трудом дается усвоение самого важного из всех математических «достижений» — таблицы умножения.

Итак, можно совсем не заучивать умножение на 9. Зачем отягощать свою память? Достаточно 10 пальцев рук. Нужно положить обе руки рядом на стол, вытянуть пальцы и приподнимать соответствующий палец, обозначающий множимое, а умножение выполнится механически, останется только прочесть результат.

Если, например, мы хотим умножить 9 на 3, то поднимаем третий палец слева и читаем: число пальцев, лежащее налево от поднятого пальца, будет числом десятков произведения (2), а число пальцев, лежащее направо, — числом единиц (7).

Если мы хотим умножить 7 на 9, то поднимаем седьмой палец слева и читаем: 63.

«Как жаль, — подумает, верно, не один из читателей, — что нельзя всю таблицу умножения прочитывать «по пальцам». Ниже мы еще приведем способы умножения на пальцах на 6, 7, 8, несколько более сложные, чем первый, но тоже очень простые.

Вернемся к девятке. Можно сказать, что каждое число состоит из девятки, взятой соответствующее число раз и увеличенной на сумму отдельных цифр этого числа. Вот примеры:

$$745 = 81 \cdot 9 + (7 + 4 + 5);$$
$$214 = 23 \cdot 9 + (2 + 1 + 4);$$
$$84 = 8 \cdot 9 + (8 + 4).$$

Подобным же образом можно записать произвольное число, например:

$$68504791 = (\text{кратное } 9) + \\ + (6 + 8 + 5 + 0 + 4 + 7 + 9 + 1).$$

Если число записано одной цифрой со многими нулями, то оно равно произведению этой цифры на число, состоящее из стольких девяток, сколько нулей стоит после этой цифры, увеличенному на ту же цифру, например:

$$8000 = 999 \cdot 8 + 8$$
$$700 = 99 \cdot 7 + 7$$
$$40 = 9 \cdot 4 + 4$$

Возьмем ряд десяти натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и перемножим эти числа на 9, записывая произведения в таком виде: 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

Заметим, что первые цифры этих произведений образуют натуральный ряд чисел от 0 до 9, а вторые цифры — убывающую прогрессию от 9 до 0.

Подобные же особенности мы можем обнаружить в любом ряду последовательных натуральных чисел, начинающихся с числа, заканчивающегося единицей. Возьмем, например, числа:

231, 232, 233, . . . , 239.

Если мы будем умножать их на 9, то получим: 2079, 2088, 2097, 2106, 2115, 2124, 2133, 2142, 2151.

Последние цифры этих чисел образуют натуральный ряд чисел от 9 до 1, а первые три цифры — серию натуральных чисел: 207, 208, 209 и т. д.

Это легко объяснить, если учесть, что умножепие какого-либо целого числа на 9 равносильно вычитанию этого числа из его десятикратного, например:

$$254 \cdot 9 = 2540 - 254; \qquad 7140 \cdot 9 = 71400 - 7140.$$

Эти, да и подобные замечания, нельзя, конечно, причислять к каким-то необычным открытиям, но не каждый о них знает, а они могут не раз очень пригодиться даже при самых простейших числовых операциях.

Целый ряд таблиц с любопытными результатами умножения на 9 мы начнем с таблицы, в которой стоит присмотреться к отдельным столбцам чисел и цифр:

$$\begin{array}{ll}
1 \cdot 9 = 09 & 90 = 9 \cdot 10 \\
2 \cdot 9 = 18 & 81 = 9 \cdot \ \ 9 \\
3 \cdot 9 = 27 & 72 = 9 \cdot \ \ 8 \\
4 \cdot 9 = 36 & 63 = 9 \cdot \ \ 7 \\
5 \cdot 9 = 45 & 54 = 9 \cdot \ \ 6
\end{array}$$

Вот другая таблица, которая может послужить источником полезных наблюдений.

Девятка, умноженная на какое-либо число, или наоборот: какое-либо число, умноженное на 9, в результате дают число, сумма цифр которого или равна 9, или делится на 9:

$$\begin{array}{ll}
9 \cdot 1 = 09 & 0 + 9 = 9 \\
9 \cdot 2 = 18 & 1 + 8 = 9 \\
9 \cdot 3 = 27 & 2 + 7 = 9 \\
9 \cdot 4 = 36 & 3 + 6 = 9 \\
9 \cdot 5 = 45 & 4 + 5 = 9 \\
9 \cdot 6 = 54 & 5 + 4 = 9 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
9 \cdot 9 = \ \ 81 & 8 + 1 = \ \ 9 \\
10 \cdot 9 = \ \ 90 & 9 + 0 = \ \ 9 \\
11 \cdot 9 = \ \ 99 & 9 + 9 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9 \\
12 \cdot 9 = 108 & 1 + 0 + 8 = 9 \\
13 \cdot 9 = 117 & 1 + 1 + 7 = 9 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

$$49 \cdot 9 = 441 \qquad 4 + 4 + 1 = 9$$
$$50 \cdot 9 = 450 \qquad 4 + 5 + 0 = 9$$
$$51 \cdot 9 = 459 \qquad 4 + 5 + 9 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9$$
$$52 \cdot 9 = 468 \qquad 4 + 6 + 8 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9$$
$$53 \cdot 9 = 477 \qquad 4 + 7 + 7 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9$$
$$54 \cdot 9 = 486 \qquad 4 + 8 + 6 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9$$
$$55 \cdot 9 = 495 \qquad 4 + 9 + 5 = 18, \text{ а } 1 + 8 = 9$$
. . . .

С другими, тоже интересными результатами умножения на 9 мы познакомимся в следующей таблице:

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$

Аналогично составлена и следующая таблица:

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$$
$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8888888888$$

Чтобы умножить какое-либо число на 999..., достаточно выполнить одно-единственное вычитание. Если, например, нужно умножить 46 538 на 999, то сначала запишем число 46 538 в качестве уменьшаемого, а второй раз — в качестве вычитаемого, однако передвинув его на столько цифр вправо, сколько девяток во множителе, затем выполняем вычитание:

$$\begin{array}{r} 46\,538\ldots \\ 46\,538 \\ \hline 46\,491\,462 \end{array}$$

Это и есть искомое произведение данных чисел. Почему возможно применение этого метода?

Подобное же упрощение используем при делении на 999 ...

Предположим, что нужно разделить 248 561 на 999. Сначала разделим 248 561 на 1000; в частном получим 248, а в остатке 561. Запишем: $248\,561 = 248 \cdot 1000 + 561$.

Но $1000 = 999 + 1$, следовательно, $248 \cdot 1000 = 248 \cdot 999 + 248$.

Теперь мы видим, что $248\,561 = 248 \cdot 999 + (248 + 561)$.

Присмотримся к этому равенству: разделив 248 561 на 999, получаем в частном 248 (то есть столько единиц, сколько тысяч в делимом) и остается остаток, состоящий из двух слагаемых: 248 (это число тысяч в делимом) и 561 (это последние три цифры делимого).

Но $248 + 561 = 809$, следовательно, окончательно получаем:

$$248\,561 : 999 = 248 \text{ и в остатке } 809.$$

Разделив подобным же образом 248 561 на 9999, получаем в частном 24 и в остатке $24 + 8561$, то есть 8585.

При таком способе деления может случиться, что остаток будет больше делителя. Например, разделив 248 798 на 999, получаем в частном 248 и в остатке 248 + + 798, то есть 1046. Оказывается, остаток больше делителя. Это легко исправить: число 1046 содержит в себе делитель всего 1 раз, следовательно, мы прибавляем 1 к частному 248, а остаток теперь уже будет равен 1046 — 999 = 47.

А вот особенно «неприятный» случай:

$$1000999 : 999.$$

Остаток от деления любого числа на 9 всегда равен остатку, полученному при делении суммы цифр этого числа на 9. А вот пример (не приводим частных, а только остатки):

$$1583 : 9 \qquad 1 + 5 + 8 + 3 = 17$$

$$\begin{array}{r}
1583 \\
-\underline{9} \\
68 \\
-\underline{63} \\
53 \\
-\underline{45} \\
8
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
17 : 9 \\
-\underline{9} \\
8
\end{array}$$

Это очень известный и очень полезный метод проверки правильности выполнения деления. Из всего этого, конечно, следует, что если от какого-либо числа отнять сумму его цифр, то получим число, делящееся на 9 : 7523 — (7 + + 5 + 2 + 3) = 7506.

Мы получим число 7506, которое делится на 9, ибо сумма его цифр 7 + 5 + 0 + 6 делится на 9.

Сумма нескольких чисел при делении на 9 дает остаток, который равен остатку, полученному от деления суммы цифр этих чисел на 9. Например:

$$
\begin{array}{r}
458 \\
+\ 165 \\
578 \\
\hline
1201
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1201 : 9 \\
\underline{9} \\
\ 30 \\
\ \underline{27} \\
\ \ 31 \\
\ \ \underline{27} \\
\ \ \ 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 + 5 + 8 = 17 \\
1 + 6 + 5 = 12 \\
5 + 7 + 8 = 20 \\
\hline
49
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
49 : 9 \\
\underline{45} \\
\ \ 4
\end{array}
$$

Число 49 при делении на 9 даст такой же остаток 4, как и сумма 1201.

Разность двух чисел при делении на 9 дает остаток, равный разности сумм цифр этих чисел. Например:

$$
\begin{array}{r}
526 \\
-\ 137 \\
\hline
389
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
389 : 9 \\
\underline{36} \\
\ \ 29 \\
\ \ \underline{27} \\
\ \ \ \ 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
5 + 2 + 6 = 13 \\
1 + 3 + 7 = 11 \\
\hline
2
\end{array}
$$

Мы получим тот же остаток 2, как и при делении на 9 разности 389.

Данное правило осложняется в том случае, когда сумма цифр уменьшаемого меньше суммы цифр вычитаемого. В этом случае к сумме цифр уменьшаемого нужно прибавить столько девяток, сколько их требуется, чтобы вычесть сумму цифр вычитаемого, Пример:

$$
\begin{array}{r}
-\;1001\\
678\\
\hline
323
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
323 : 9\\
\underline{27}\\
\;\;53\\
\;\;\underline{45}\\
\;\;\;\;8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 + 0 + 0 + 1 = \;\;2\\
6 + 7 + 8 = 21
\end{array}
$$

Как же в данном случае из 2 вычесть 21? Прибавим к числу 2 три девятки (этим мы не изменим остатка, полученного при делении на девять); тогда вычитаем $29 - 21 = 8$ и, таким образом, получаем остаток 8, то есть такой же, как и у разности 323.

И, наконец, остаток от деления произведения двух чисел на 9 можно получить кратким путем, перемножив остатки от деления на 9 обоих сомножителей и отыскав остаток от деления на 9 полученного таким путем произведения.

Вот пример:

$$
\begin{array}{r}
\times\;124\\
26\\
\hline
744\\
248\;\\
\hline
3224
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
3224 : 9\\
\underline{27}\\
\;\;52\\
\;\;\underline{45}\\
\;\;\;\;74\\
\;\;\;\;\underline{72}\\
\;\;\;\;\;\;2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 + 2 + 4 = 7\\
2 + 6 = 8
\end{array}
$$

Перемножаем остатки от деления на девять: $7 \cdot 8 = 56$. Произведение 56 при делении на 9 дает остаток 2, то есть такой же, как и произведение 3224.

Исходя из этой особенности, можно привести любопытный способ деления многозначных чисел на 9.

Положим, нам нужно разделить 657 524 418 на 9. Вычислим сумму цифр данного числа: $6 + 5 + 7 + 5 + 2 + 4 + 4 + 1 + 8 = 42$. Затем, разделив 42 на 9, находим остаток 6. Вычтя остаток 6 из делимого, получим число, которое будет делиться на 9 без остатка — 657 524 412 : 9.

Деление можно произвести следующим образом: запишем делимое, уже уменьшенное на остаток, получаемый при делении на 9; над последней цифрой делимого пишем нуль и начинаем производить вычитание так, как если бы над делителем было записано многозначное число, оканчивающееся нулем:

$$\begin{array}{r} 0 \\ \underline{657524412} \\ 8 \end{array}$$

Полученную цифру разности 8 вписываем наверху, слева от нуля, и ищем вторую цифру разности:

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{657524412} \\ 68 \end{array}$$

Таким образом производим вычитание до конца:

$$\begin{array}{r} -\,730582680 \\ \underline{657524412} \\ 73058268 \end{array}$$

Разность 73 058 268 одновременно является искомым частным. Напоминаем: перед тем как начать вычитание, из делимого нужно вычесть остаток, который может быть получен при делении на 9.

Если мы запишем какое-либо двузначное число, а затем вычтем из него число обращенное, то разность всегда будет делиться на 9; например:

$$\begin{array}{r} -\,72 \\ 27 \\ \hline 45 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,92 \\ 29 \\ \hline 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,63 \\ 36 \\ \hline 27 \end{array}$$

Кроме того, как это видно, разность равна числу 9, умноженному на разность цифр данного числа: $72 - 27 = 45 = 9 \cdot (7 - 2)$.

Это замечание может не раз пригодиться бухгалтерам при отыскании ошибок в балансах, вытекающих из перестановки цифр в числах, записываемых по одной и другой стороне бухгалтерских книг.

Если мы возьмем трехзначное число, в котором первая и последняя цифры не одинаковы, и из этого числа вычтем число обращенное, то всегда получим разность, которая будет делиться на 9, причем средней цифрой будет девятка:

$$563 - 365 = 198, \quad 756 - 657 = 099.$$

Любопытные результаты дает возведение в квадрат чисел, составленных из одних девяток. Вот они:

$$\begin{aligned} 9^2 &= 81 \\ 99^2 &= 9801 \\ 999^2 &= 998001 \\ 9999^2 &= 99980001 \\ 99999^2 &= 9999800001 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сначала записывают цифры 8 и 1, а затем перед восьмеркой вписывают столько девяток, а перед единицей столько нулей, из скольких девяток без одной составлено число, возводимое в квадрат.

Многих увлекает вопрос написания одного и того же числа при помощи четырех арифметических действий. Как, например, можно изобразить девятку при помощи всех десяти цифр?

Вот девятка в этой оригинальной записи:

$$\frac{97\,524}{10\,836} \text{ или } \frac{95\,823}{10\,647} \text{ или } \frac{95\,742}{10\,638}$$

Следует обратить внимание на то, что в этих формулах каждая из десяти цифр взята только по одному разу.

А вот девятка, записанная девятью цифрами без нуля:

$$\frac{75\,249}{8\,361} \text{ или } \frac{58\,239}{6\,471} \text{ или } \frac{57\,429}{6\,381}$$

А как можно записать большое число при помощи только трех девяток?

Поместим три девятки таким образом: 9^{9^9}.

Эта девятка возведена в степень, показатель которой девять, в свою очередь, тоже возведен в девятую степень. Но

$$9^9 = 387\ 420\ 489, \text{ значит, } 9^{9^9} = 9^{387\,420\,489}$$

Другими словами, следует выполнить 387 420 488 умножений на 9, чтобы получить искомое число.

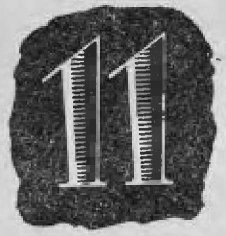
Число 9^{9^9}, если его записать в десятичной системе исчисления, имело бы 369 692 128 цифр.

Если бы мы захотели записать его на бумажной ленте, то, исходя из предположения, что каждая цифра займет 4 *мм*, мы должны были бы располагать лентой длиной более чем 1478 *км*.

Это несколько больше, чем удвоенное расстояние от Парижа до Авиньона и обратно, если считать его по железной дороге.

Время, необходимое для написания этого числа, если предположить, что в секунду мы будем записывать одну цифру, а ежедневно трудиться по 10 часов, займет 28 лет и 48 дней, причем работать нужно будет беспрерывно, то есть и по воскресеньям и в праздники.

Для большей ясности скажу, что первой цифрой искомого числа будет 2, а последней 9. Остается определить ни больше, ни меньше как 369 692 126 цифр. К сожалению, — подумаете вы наверное, — знание этих двух цифр не намного облегчит работу. Я того же мнения.



2. Особые свойства числа 11

Эту особенность открыл марокканец Ибн-аль-Банна и опубликовал в книге «Аналитический сборник задач на счисление».

Он заметил, что, для того чтобы получить произвольную степень числа 11, вовсе не обязательно выполнять утомительные умножения $11 \cdot 11 \cdot 11 \ldots$ (n сомножителей).

Это получить можно более легким путем, построив такую цифровую пирамиду:

$$
\begin{array}{ll}
11^1 = 11 & 1 + 1 = 2 \\
11^2 = 121 & 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\
11^3 = 1331 & 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 \\
11^4 = 14641 & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

На последнем месте всегда стоит единица, десятки каждой последующей степени равны десяткам предыдущей степени плюс единицы, сотни равны сотням предыдущей степени плюс десятки, и т. д.

Такие же любопытные цифровые результаты дает умножение следующих совокупностей единиц:

$$
\begin{array}{rl}
11 \cdot 111 & = 1221 \\
111 \cdot 11111 & = 1233321 \\
1111 \cdot 1111111 & = 123444321 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Еще более интересные пирамиды цифр можно образовать из квадратов чисел, составленных только из единиц:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
11^2 &= 121\\
111^2 &= 12321\\
1111^2 &= 1234321\\
11111^2 &= 123454321\\
111111^2 &= 12345654321\\
1111111^2 &= 1234567654321\\
11111111^2 &= 123456787654321\\
111111111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}
$$

Если обе части этого равенства умножить на $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, то есть на $9 \cdot 9$, то получим
$999\,999\,999 \cdot 999\,999\,999 = 12\,345\,678\,987\,654\,321 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$.

Числа, полученные в качестве квадратов «единиц», тоже обнаруживают любопытные свойства:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 1 &= 4 = 2^2\\
1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 9 = 3^2\\
1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 16 = 4^2\\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 25 = 5^2\\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 36 = 6^2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Кроме того, каждое из этих чисел можно записать таким оригинальным способом:

$$
\begin{aligned}
11^2 &= 121 = \frac{22 \cdot 22}{1+2+1}\\
111^2 &= 12321 = \frac{333 \cdot 333}{1+2+3+2+1}\\
1111^2 &= 1234321 = \frac{4444 \cdot 4444}{1+2+3+4+3+2+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Если бы кто-нибудь захотел облегчить себе — впрочем, и так очень легкое — деление на 11, то может воспользоваться сокращенным способом деления, который очень напоминает сокращенный способ деления на 9.

Например, необходимо разделить 345 785 на 11. Под последней цифрой делимого мы вписываем нуль и начинаем производить вычитание таким образом: разность 5 вписываем перед нулем под десятками и вычитаем ее из 8, разность 3 вписываем под сотнями, вычитаем ее из 7, и т. д.:

$$\begin{array}{r} 345785 \\ \underline{314350} \\ 31435 \end{array}$$

Результат этого вычитания и является искомым частным.

Возьмем какое-нибудь произвольное число, по меньшей мере четырехзначное. Пусть, например, это будет число 43 357. Под числом 43 357 запишем это же самое число таким образом, чтобы первая цифра записываемого числа стояла под четвертой цифрой верхнего числа; затем записанные таким образом числа сложим:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 43357 \\ 43357 \end{array} \\ \hline 43400357 \end{array}$$

Если теперь полученную сумму станем поочередно делить на 7, 11 и 13, то снова получим исходное число:

$$43400357 : 7 = 6200051$$

$$6200051 : 11 = 563641$$

$$563641 : 13 = 43357$$

Это объясняется тем, что произведение этих трех чисел равно $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. В самом деле, мы складывали два числа, которые можно записать следующим образом: $43\,357 \cdot 1000 + 43\,357 = 43\,357 \cdot (1000 + 1) = 43357 \cdot 1001$, а так как $1001 : 7 = 143$, $143 : 11 = 13$ и $13 : 13 = 1$, значит, после выполнения трех делений останется 43 357.

Если мы возьмем трехзначное число, то тогда вышеприведенное сложение превратится в приписывание; например:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 345 \\ 345 \end{array} \\ \hline 345345 \end{array}$$

И снова имеем: $[(345345 : 7) : 11] : 13 = 43357$.

Здесь происходит как бы соединение 11 с 7 и 13 посредством общего им числа 1001.

Уже и раньше можно было заметить очень большую близость между 11 и 9. Здесь же мы обратим внимание на еще одну их родственную связь.

Обсуждая удивительные свойства девятки, мы указывали на любопытное явление, заключащееся в том, что если из трехзначного числа вычесть это же число, записанное в обратном порядке, то разность всегда будет кратным числа 9. А теперь еще добавим, что одновременно она является кратным числа 11; например:

$$932 - 239 = 693 = 9 \cdot 7 \cdot 11$$
$$845 - 548 = 297 = 9 \cdot 3 \cdot 11$$

Как же это объяснить? А вот как.

Предположим, что какое-либо трехзначное число (первая и последняя цифры которого не должны быть одинаковыми) состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно записать в следующем виде: $100a + 10b + c$. Записанное в обратном порядке, оно примет следующий вид: $100c + 10b + a$. Вычтя одно число из другого и разделив результат на 9, получим:

$$\frac{100a + 10b + c - (100c + 10b + a)}{9} = \frac{99(a - c)}{9} = 11(a - c)$$

Следовательно, если кто-нибудь назовет какое-либо трехзначное число, то, умножив разность его крайних цифр на 11, можно моментально определить частное, получаемое при делении на 9 разности данного числа и этого же числа, записанного в обратном порядке.

Сколько людей может удивить такая мгновенная математическая операция и... математический талант будущего соперника Инауди!

3. Любопытные свойства чисел 37, 41, 45 и некоторых других

Запишем арифметическую прогрессию, первый член и разность которой равны 3. Вот она: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Если каждый член этой прогрессии умножим на 37, то получим: 111, 222, 333, 444, 555, ..., 999.

В этой новой прогрессии можно заметить не только то, что каждый член представляет собой трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, но и то, что сумма цифр каждого члена равна соответствующему множимому: $1 + 1 + 1 = 3$, $2 + 2 + 2 = 6$, ..., $9 + 9 + 9 = 27$.

Объяснить эту особенность не представляет никакого труда.

Возьмем произвольное трехзначное число (например, 238). Припишем к этому числу его дополнение до 999 (в данном случае 761). В результате получим число, которое обладает той удивительной особенностью, что оно всегда делится на 37, а полученное при этом частное, в свою очередь, делится на 27, и, наконец, второе частное всегда на единицу больше исходного числа.

$$
\begin{aligned}
&238\\
&238761 : 37 = 6453\\
&\qquad\qquad\quad 6453 : 27 = 239\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 239 = 238 + 1
\end{aligned}
$$

Этот случай понять уже труднее, но он объясняется так.

Если взятое нами число мы обозначим через a, то проделанные нами действия можно записать в следующем виде:

$a \cdot 1000 + (999 - a) = 999\,a + 999 = 999\,(a + 1)$,

но так как $999 = 111 \cdot 9 = 37 \cdot 3 \cdot 9 = 37 \cdot 27$,

следовательно, $a \cdot 1000 + (999 - a) = 37 \cdot 27\,(a + 1)$.

Произведение числа 37 на сумму его цифр равно сумме кубов тех же цифр: $37 \cdot (3 + 7) = 3^3 + 7^3$; если же число 37 увеличим на произведение его цифр, то в результате получим сумму квадратов тех же цифр: $37 + 3 \cdot 7 = 3^2 + 7^2$.

И, наконец, довольно любопытно произведение числа 37 на обе его цифры: $37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$.

Однако наиболее интересным свойством числа 37 является то, что некоторые его кратные при поочередной, точнее говоря, при круговой перестановке цифр не теряют своей особенности: они также делятся на 37. Например:

$259 = 37 \cdot 7$	$185 = 37 \cdot 5$	$296 = 37 \cdot 8$
$592 = 37 \cdot 16$	$518 = 37 \cdot 14$	$629 = 37 \cdot 17$
$925 = 37 \cdot 25$	$851 = 37 \cdot 23$	$962 = 37 \cdot 26$

Подобное же явление, достойное внимания, мы наблюдаем на некоторых числах по отношению к числу 41. Например:

$$17\,589 = 41 \cdot 429$$
$$75\,891 = 41 \cdot 1851$$
$$58\,917 = 41 \cdot 1437$$
$$89\,175 = 41 \cdot 2175$$
$$91\,758 = 41 \cdot 2238$$

Число 45 состоит из четырех чисел: 8, 12, 5, 20, другими словами, $45 = 8 + 12 + 5 + 20$. Если с каждым из этих четырех чисел мы проделаем одно из четырех арифметических действий с двойкой, то в результате всегда получим 10:

$$\begin{array}{r}
8 + 2 = 10 \\
12 - 2 = 10 \\
5 \cdot 2 = 10 \\
\underline{20} : 2 = 10 \\
45
\end{array}$$

Но не только число 45 разлагается на такие части. Этой особенностью обладает каждое число следующего вида $c = a(b + 1)^2$, где a и b произвольные натуральные числа. Число c легко разложить на четыре следующих слагаемых: $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, чтобы из них можно было составить четыре равенства:

$$\begin{array}{l}
c_1 + b = ab \\
c_2 - b = ab \\
c_3 \cdot b = ab \\
c_4 : b = ab
\end{array}$$

Число 400, например, дает пять разложений:

$$\begin{array}{lll}
27 + 9 = 36 & 60 + 4 = 64 & 72 + 3 = 75 \\
45 - 9 = 36 & 68 - 4 = 64 & 78 - 3 = 75 \\
4 \cdot 9 = 36 & 16 \cdot 4 = 64 & 25 \cdot 3 = 75 \\
\underline{324} : 9 = 36 & \underline{256} : 4 = 64 & \underline{225} : 3 = 75 \\
400 & 400 & 400
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
0 + 19 = 19 & 99 + 1 = 100 \\
38 - 19 = 19 & 101 - 1 = 100 \\
1 \cdot 19 = 19 & 100 \cdot 1 = 100 \\
\underline{361} : 19 = 19 & \underline{100} : 1 = 100 \\
400 & 400
\end{array}$$

Вернемся к числу 45. Оно является суммой девяти следующих цифр: $45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + + 8 + 9$.

Никто не станет возражать, что из суммы нескольких чисел можно вычесть сумму нескольких чисел, лишь бы вторая сумма не была больше первой суммы. За уменьшаемое примем сумму девяти цифр, записанных в обратном порядке, а за вычитаемое — сумму тех же цифр в натуральном ряде:

$$\begin{array}{r}
9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
\underline{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9} \\
8 + 6 + 4 + 1 + 9 + 7 + 5 + 3 + 2
\end{array}$$

Вычитание производим обычным путем, начиная справа: 9 от 1 отнять нельзя, следовательно, мы «занимаем» 1 у соседней цифры слева; теперь мы имеем 11—9=2. Вместо 2 осталась 1, но 8 отнять от 1 невозможно — значит, нужно «занять» 1 у соседней цифры слева, получаем $11 - 8 = 3$. Таким образом мы производим вычитание до конца, в результате снова получаем сумму девяти цифр, которые на этот раз расположены в произвольном порядке. Эта сумма тоже равна 45, то есть суммы цифр уменьшаемого, вычитаемого и разности равны; итак, мы имеем парадоксальное вычитание: 45 — 45 = 45.

Однако шутки в сторону. Перед нами вычитание, выполненное по всем правилам:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 987654321 \\ 123456789 \end{array} \\ \hline 864197532 \end{array}$$

Оно отличается только тем, что в уменьшаемом и вычитаемом выступают упорядоченные ряды цифр, а в разности выступают те же самые цифры, только расставленные не по принципу «возрастания».

Раз мы уже говорим об этом числе, девять цифр которого расположены в порядке возрастающей последовательности, то отметим в скобках, что это число обладает еще той особенностью, что если его умножать на 1, 2, 4, 5, 7 или 8, то есть на каждую из цифр, не делящихся на 3, то оно в произведении даст число, в котором ни одна из цифр не повторяется. Вот, например, пять произведений:

$$2 \cdot 123456789 = 246913578$$
$$4 \cdot 123456789 = 493827156$$
$$5 \cdot 123456789 = 617283945$$
$$7 \cdot 123456789 = 864197523$$
$$8 \cdot 123456789 = 987654312$$

Значит, сумма цифр каждого из этих произведений тоже равна 45.

4. Число 100

Об этом красивом, округлом числе в общем сказать можно немного. Но кое-что, конечно, найдется. По примеру 45 можно и 100 разложить на следующие четыре слагаемых: $12 + 20 + 4 + 64$, поочередно выполняя с каждым из них одно из четырех арифметических действий с четверкой, в результате всегда получим 16:

$$
\begin{array}{r}
12 + 4 = 16 \\
20 - 4 = 16 \\
4 \cdot 4 = 16 \\
\underline{64} : 4 = 16 \\
100
\end{array}
$$

---

100 равно сумме кубов первых четырех натуральных чисел:

$$100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64$$

Но более всего число 100 известно тем, что существует много удивительных способов изображения этого числа всякими другими цифрами, конечно, кроме единицы с двумя нулями.

Его можно изобразить пятью одинаковыми цифрами:

$$
\begin{array}{l}
111 - 11 \\
3 \cdot 33 + (3 : 3) \\
5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \\
5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5)
\end{array}
$$

Его можно изобразить при помощи шести девяток: $99\frac{99}{99}$.

Очень интересно изображение числа 100 при помощи всех девяти натуральных чисел: $100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$.

А вот дальнейшие комбинации:

$$75 + 24 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18}; \quad 91 + \frac{7524}{836}; \quad 91 + \frac{5742}{638};$$

$$91 + \frac{5823}{647}; \quad 94 + 5 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2}; \quad 94 + \frac{1578}{263};$$

$$96 + \frac{2148}{537}; \quad 96 + \frac{1428}{357}; \quad 96 + \frac{1752}{438}.$$

И, наконец, два изображения при помощи десяти цифр:

$$50 + 49 + \frac{1}{2} + \frac{38}{76}; \qquad 78 + 21 + \frac{3}{6} + \frac{45}{90}.$$

Можно найти сотни подобных способов изображения числа 100.

5. Числовая карусель

Одним из самых таинственных чисел является число 142 857.

Это число получается при обращении дроби $\frac{1}{7}$ в десятичную дробь, то есть при делении 1 : 7

```
 1 | 7
   |--------
10 | 0,142857
 7
 --
 30
 28
 --
  20
  14
  --
   60
   56
   --
    40
    35
    --
     50
     49
     --
      1
```

В результате этого деления получаем число 0,142857, а в остатке 1 — последний остаток повторяет исходное число. Если бы мы продолжили деление, то у нас все время повторялись бы цифры 142 857 — это могло бы продолжаться бесконечно.

Если мы будем поочередно умножать это число на 2, 3, 4, 5 и 6, то получим произведения, которые будут состоять из тех же самых цифр, расставленных в ином порядке, и, конечно, не как попало: в произведении это число даст лишь круговую перестановку своих цифр.

Достаточно присмотреться к нижеприведенной таблице, а также к кругу, в котором расположены эти цифры (рис. 41):

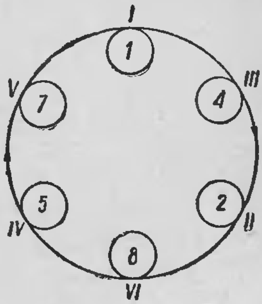


Рис. 41

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & 1 \cdot 142857 = 142857 \\
\text{II.} & 2 \cdot 142857 = 285714 \\
\text{III.} & 3 \cdot 142857 = 428571 \\
\text{IV.} & 4 \cdot 142857 = 571428 \\
\text{V.} & 5 \cdot 142857 = 714285 \\
\text{VI.} & 6 \cdot 142857 = 857142
\end{array}
$$

Интересно также попарно сложить произведения I и VI, II и V, III и IV.

Умножив это таинственное число 142 857 на 7, в произведении получим шесть девяток: 999 999.

А теперь умножим 142 857 на 8; получим очень любопытное число — 1 142 856; если зачеркнем первую цифру этого числа и ее же прибавим к последней цифре, то снова получим исходное число 142 857. Умножая это число на различные множители, каждый раз будем получать числа, состоящие из тех же самых цифр 1, 2, 4, 8, 5, 7 и представляющие собой одну из круговых перестановок числа 142 857:

$$8 \cdot 142857 = 1142856 \ (142857)$$

$$9 \cdot 142857 = 1285713 \ (285714)$$

$$10 \cdot 142857 = 1428570 \ (428571)$$
$$11 \cdot 142857 = 1571427 \ (571428)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$23 \cdot 142857 = 3285711 \ (285714)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$89 \cdot 142857 = 12714273 \ (714285)$$

В этом последнем умножении мы получили восьмизначный результат, следовательно, нужно зачеркнуть две первые цифры и прибавить их к двум последним.

Таким же образом следует поступать и с тремя первыми цифрами при умножении: 2313 · 142 857 = 330 428 241 (428 571).

Только произведения числа 142 857 на числа, делящиеся на 7, будут представлять собой исключения, так как после вышеупомянутых преобразований получаются числа, составленные из одних девяток.

Не лишним будет добавить здесь еще несколько мелких замечаний об этом таинственном числе. Если любое из произведений, полученных при последовательном умножении этого числа на шесть первых цифр, рассечь на три грани, по две цифры в каждой, то всегда получим или 2, 4, 6, 8, 10, 12, умноженное на 7, или какое-либо из этих произведений + 1; например:

14 |28| 57	42 |85| 71
$14 = 7 \cdot 2$	$42 = 7 \cdot 6$
$28 = 7 \cdot 4$	$85 = 7 \cdot 12 + 1$
$57 = 7 \cdot 8 + 1$	$71 = 7 \cdot 10 + 1$

Умножая 142 857 на 326 451, получим такой результат, к которому стоит присмотреться, чтобы выявить новые интересные свойства этого числа:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 142857 \\ 326451 \end{array} \\
\hline
142857 \\
714285 \\
571428 \\
857142 \\
285714 \\
428571 \\
\hline
46635|810507
\end{array}
\qquad 46635 + 810507 = 857142
$$

В чем же заключается тайна этого числа 142 857, действительно «необыкновенного»?

Кто не сможет угадать сам, тот найдет объяснение во второй части этой же книги. Там как раз будут раскрыты такие и подобные им тайны.

6. О восьми цифрах без восьмерки и о восьмерке без восьми цифр

Число, составленное из восьми последовательных цифр без восьмерки, изобразится, конечно, так: 12 345 679. Оно отличается той особенностью, что если его поочередно умножать на число 9 и его кратные, взятые из таблицы умножения, а следовательно, на числа 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, то в произведениях получим числа, состоящие из девяти одинаковых цифр:

$$
\begin{array}{r}
9 \cdot 12345679 = 111111111 \\
18 \cdot 12345679 = 222222222 \\
27 \cdot 12345679 = 333333333 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
63 \cdot 12345679 = 777777777 \\
72 \cdot 12345679 = 888888888 \\
81 \cdot 12345679 = 999999999
\end{array}
$$

Как можно заметить, цифра, выступающая в произведении девятикратно, указывает, сколько девяток содержится во множителе и одновременно является разностью множителя и ближайшего ему большего числа, оканчивающегося нулем; например:

$10 - 9 = 1$, $20 - 18 = 2$, ..., $80 - 72 = 8$, $90 - 81 = 9$.

Мало того, это число, умноженное на число 3 или его кратные, даст в произведении число, составленное из троекратно повторенных трехзначных групп; например:

$$6 \cdot 12345679 = 74074074$$
$$15 \cdot 12345679 = 185185185$$
$$21 \cdot 12345679 = 259259259$$

Будет ли это продолжаться бесконечно? Пусть читатель определит это сам.

А что мы получим, если умножим 12 345 679 на 8, то есть на цифру, которой как раз недостает в нашем числе?

Получим число, состоящее из восьми последовательных цифр, кроме единицы, расположенных в обратном порядке: $8 \cdot 12\,345\,679 = 98\,765\,432$.

Если при этом умножении мы разложим 12 345 679 на 12 345 678 и 1, то предыдущее равенство примет следующий вид: $8 \cdot 12\,345\,678 + 8 = 98\,765\,432$.

Можно составить такую числовую пирамиду:

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$
$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$
$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$
$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

Пожалуй, нет такого разумного человека, который бы приписывал числам магические свойства. Но существуют люди, которые питают симпатию к одним числам и не любят другие.

Предположим, что чьей-то любимой цифрой является 7 (которая, кстати, больше всего возбуждает симпатий или же антипатий). Этому человеку можно преподнести приятный сюрприз, предложив ему умножать 123 456 789 на 7 · 9, то есть на 63. В результате будут получены почти одни семерки:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 123456789 \\
63 \\
\hline
370370367 \\
740740734 \\
\hline
7777777707
\end{array}
$$

Если кто-либо питает симпатию к восьмерке, пусть умножит то же число на 8 · 9, то есть на 72. А кто предпочитает тройку, пусть умножит это же число на 3 · 9, то есть на 27. Но всякий раз в произведении будет один нуль.

К концу следует добавить, что число 12 345 679 является периодом периодической десятичной дроби, которая получается при обращении дроби $\frac{1}{81}$ в десятичную дробь или же — что то же самое — при делении 1 на 81. А именно:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 81 \\
\cline{2-2}
 & 0{,}012345679 \\
100 & \\
\hline
190 & \\
\hline
280 & \\
\hline
370 & \\
\hline
460 & \\
\hline
550 & \\
\hline
640 & \\
\hline
730 & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

При дальнейшем делении снова и снова повторяются в том же порядке те же цифры 012345679.

7. Обратимые умножения

Так можно назвать те умножения, которые после обращения, то есть при чтении их с конца, дают произведения обращенных сомножителей как бы отраженными в зеркале.

Вот пример:

$$\begin{array}{rcrcr} 2\cdot 41 &=& 82 & \qquad 28 &=& 14\cdot 2 \\ 21\cdot 32 &=& 672 & \qquad 276 &=& 23\cdot 12 \\ 211\cdot 312 &=& 68952 & \qquad 25986 &=& 213\cdot 122 \end{array}$$

Если кто-либо захочет самостоятельно отыскать еще другие такие же «обратимые» числа, тот должен будет учесть, что следует избегать чисел, цифры которых при перемножении в произведении дают более 9.

«Обратимыми» бывают также квадраты двузначных и трехзначных чисел; например:

$$\begin{array}{rcr} 12\cdot 12 &=& 144 \\ 13\cdot 13 &=& 169 \\ 102\cdot 102 &=& 10\,404 \\ 103\cdot 103 &=& 10\,609 \\ 112\cdot 112 &=& 12\,544 \\ 122\cdot 122 &=& 14\,884 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 441 &=& 21\cdot 21 \\ 961 &=& 31\cdot 31 \\ 40\,401 &=& 201\cdot 201 \\ 90\,601 &=& 301\cdot 301 \\ 44\,521 &=& 211\cdot 211 \\ 48\,841 &=& 221\cdot 221 \end{array}$$

У кого появится желание, тот пусть поищет еще другие подобные квадраты, но, к сожалению, их найдется уже немного.

Не совсем «обратимыми», но близкими к ним являются квадраты, состоящие из тех же самых цифр, только записанных в измененном порядке. Вот пример:

$$13^2 = 169 \qquad 157^2 = 24\,649 \qquad 913^2 = 833\,569$$
$$14^2 = 196 \qquad 158^2 = 24\,964 \qquad 914^2 = 835\,396$$

А вот кубы такого же типа:

$$345^3 = 41\,063\,625$$
$$384^3 = 56\,623\,104$$
$$405^3 = 66\,430\,125$$

Последующие пары чисел тем интереснее, что не только их квадраты, но и квадраты квадратов записываются теми же цифрами:

$$32^2 = 1024 \qquad 32^4 = 1\,048\,576$$
$$49^2 = 2401 \qquad 49^4 = 5\,764\,801$$

Другую разновидность подобных чисел с «родственными» цифрами представляют числа, произведения которых составлены из цифр, входящих в множимое и множитель; например:

$$15 \cdot 93 = 1395 \qquad 321 \cdot 975 = 312\,975$$
$$35 \cdot 41 = 1435 \qquad 681 \cdot 759 = 516\,879$$
$$21 \cdot 87 = 1827 \qquad 843 \cdot 876 = 738\,468$$
$$27 \cdot 81 = 2187 \qquad 902 \cdot 875 = 789\,250$$

Таких «родственных» чисел можно отыскать еще много, но выявление требует кропотливости, а радость от находки небольшая...

Некий французский математик в 1948 году послал в американский ежемесячный математический журнал задачу, в которой нужно было найти такое натуральное число n, которое удовлетворяет следующему условию:

$$n^3 = 19\,000\,458\,461\,599\,776\,807\,277\,716\,631,$$

а также просил проверить, что не только само это 29-значное число делится на n, но и каждая из двадцати восьми его круговых перестановок делится на n без остатка.

Чтобы облегчить труд читателю, выдвигаем предположение, что речь идет о числе $n = 2\,668\,423\,111$. Мы так измучены поисками этого числа n, что не имеем сил для проверки его и просим сделать это читателя.

8. Нетрудные для умножения числа

Существует такое число, оканчивающееся цифрой 2, в котором, если переставить эту двойку на начало числа, получим число, которое будет точно вдвое больше предыдущего. Другими словами, умножение этого числа на 2 выполняется путем простого перемещения двойки с конца числа в начало.

Вот это число и результат умножения его на 2:

105 263 157 894 736 842,
210 526 315 789 473 684

Как было найдено это число?

Очень простым путем. Так как его последняя цифра — двойка, а после перемещения цифры 2 на начало этого ряда цифр мы должны получить удвоенное число, то предпоследней цифрой должно быть 4, третьей с конца — 8, перед восьмеркой — 6, перед шестеркой должно стоять 3... и так далее, пока не дойдем до нуля, удвоить который уже нельзя.

Цифры найденного числа можно записать двукратно: 105 263 157 894 736 842 105 263 157 894 736 842 или же троекратно, четверократно и так далее, а особенность легкого умножения на 2 полученное при этом число сохраняет.

Таким же образом можно отыскать число, которое, после перестановки цифры 4 с конца на его начало, становится вчетверо больше.

Это будут значительно более короткие, чем раньше, числа:

$$102564,$$
$$410256$$

И снова можно выписать цифры этого числа двукратно, троекратно и так далее, а полученные числа сохранят свою особенность — легкость умножения на 4.

А можно ли получить число подобной структуры, оканчивающееся на 3 или на 5? Кто не сможет ответить на этот вопрос сразу, тот пусть предпримет ряд попыток, однако должен запастись терпением...

А вот некоторый разряд чисел, легко делящихся. Чтобы разделить число 8712 на 4, достаточно записать его в обратном порядке: 2178. В самом деле:

$$\frac{8712}{2178} = 4$$

Цифры этого числа можно повторить многократно, а легкость деления на 4 сохранится; например:

$$\frac{871287128712}{217821782178} = 4$$

Между 87 и 12 можно вставить одну или много девяток, а легкость деления на 4 сохранится:

$$\frac{879912}{219978}=4$$

Если мы захотим повторять числа, «нафаршированные» девятками, то должны будем разместить девятки симметрично, чтобы при обращении числа девятки эти остались на месте; например:

$$\frac{879991287912879128799912}{219997821978219782199978}=4$$

Кроме того, при повторении чисел их можно разделять нулями, лишь бы только нули были размещены симметрично, так чтобы при обращении чисел все нули остались на месте; например:

$$\frac{8799120871200000871208799912}{2199780217800000217802199978}=4$$

Подобными свойствами обладает еще число 9801; если его записать в обратном порядке, то получим частное от деления этого числа на 9:

$$9801:9=1089.$$

Но о числе 1089 мы поговорим особо.

9. Число 1089 и некоторые другие

Возьмем какое-либо трехзначное число, в котором число сотен больше числа единиц. Из этого числа вычтем это же число, записанное в обратном порядке; например:

$$\begin{array}{r}832\\-\underline{238}\\594\end{array}\quad\text{или}\quad\begin{array}{r}726\\-\underline{627}\\099\end{array}$$

Если в разности не будет сотен, то на место сотен следует вписать нуль, чтобы получить трехзначную разность. К этой разности прибавим разность, записанную в обратном порядке, и в результате сложения получим число 1089; например:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 594 \\ 495 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad + \begin{array}{r} 099 \\ 990 \\ \hline 1089 \end{array} \end{array}$$

Число 1089 очень легко умножить на 9, достаточно только записать число в обратном порядке:

$$\times \begin{array}{r} 1089 \\ 9 \\ \hline 9801 \end{array}$$

Тем же свойством обладают и следующие числа:

$$\times \begin{array}{r} 10\,989 \\ 9 \\ \hline 98\,901 \end{array} \qquad \times \begin{array}{r} 109\,989 \\ 9 \\ \hline 989\,901 \end{array} \qquad \times \begin{array}{r} 1099\ldots9989 \\ 9 \\ \hline 9899\ldots9901 \end{array},$$

а также повторения этих чисел, разграниченных или неразграниченных нулями, например:

$$\times \begin{array}{r} 108\,910\,891\,089 \\ 9 \\ \hline 980\,198\,019\,801 \end{array} \qquad \times \begin{array}{r} 109\,989\,000\,109\,989 \\ 9 \\ \hline 989\,901\,000\,989\,901 \end{array}$$

Умножим число 1089 на 2 и на 8:

$$\times \begin{array}{r} 1089 \\ 2 \\ \hline 2178 \end{array} \qquad \times \begin{array}{r} 1089 \\ 8 \\ \hline 8712 \end{array}$$

Мы видим, что если число 2178 умножим на 4, то получим число, которое будет отличаться от исходного тем, что будет записано в обратном порядке, то есть мы получим обращенное число.

Тем же свойством обладают числа:

$$21978,\ 219978,\ 2199\ldots9978,$$

а также их повторения, разграниченные или неразграниченные нулями; например:

$$\begin{array}{r} \times\, 21\,780\,002\,178 \\ 4 \\ \hline 87\,120\,008\,712 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 219\,978\,219\,978 \\ 4 \\ \hline 879\,912\,879\,912 \end{array}$$

Сравним следующие произведения:

$$\begin{array}{r} \times\, 1089 \\ 3 \\ \hline 3267 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 1089 \\ 7 \\ \hline 7623 \end{array},$$

а также еще одну пару произведений:

$$\begin{array}{r} \times\, 1089 \\ 4 \\ \hline 4356 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 1089 \\ 6 \\ \hline 6534 \end{array}$$

В обоих случаях в произведениях мы получаем взаимно обращенные числа. И, наконец, умножение: $1089 \cdot 5 = 5445$ в произведении дает число, которое после обращения не изменяется, то есть если мы запишем это число в обратном порядке, то получим то же самое число. То же самое будет, если мы возьмем, например, следующее число:

$$\begin{array}{r} \times\, 10998900109989 \\ 5 \\ \hline 54994500549945 \end{array}$$

10. Любопытные свойства чисел

Число 119 при делении на 2 дает в остатке 1; при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 6 дает в остатке 5; на 7 же делится без остатка:

$$119 : 2 = 59 \text{ остаток } 1$$
$$119 : 3 = 39 \text{ остаток } 2$$
$$119 : 4 = 29 \text{ остаток } 3$$
$$119 : 6 = 19 \text{ остаток } 5$$

Второй цифрой частного в этих четырех случаях всегда является 9, а первые цифры те же, что и в остатках, только записаны в обратном порядке.

Можно еще добавить, что это число при делении на 8 в остатке дает 7.

Число 225 можно несколькими способами разложить в прогрессии, первым членом которых будет 1:

$$225 = 1 + 75 + 149$$
$$225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89$$
$$225 = 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43 + 49$$

Можно ли подобным же образом разложить число 225 в прогрессию из семи членов?

Число 228 можно разложить несколькими способами в прогрессии с одним и тем же первым членом:

$$228 = 18 + 44 + 70 + 96$$
$$228 = 18 + 26 + 34 + 42 + 50 + 58$$
$$228 = 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33 + 36 + 39$$

И снова вопрос: существуют ли еще иные подобные же способы разложения числа 228. Это легкая, но очень интересная операция для получения многих любопытных комбинаций. Советуем проделать ее самостоятельно.

Числа 125, 250 и 375 обладают следующей общей особенностью, а вместе с тем и отличительной чертой: чтобы разделить их на 5, достаточно зачеркнуть первую цифру:

$$125 : 5 = 25, \quad 250 : 5 = 50, \quad 375 : 5 = 75.$$

Следовательно, эти числа можно назвать самыми легкими для деления. Так же легко выполняются и следующие деления:

$$1125 : 9, \ 2250 : 9, \quad 3375 : 9, \ 4500 : 9, \quad 5625 : 9,$$
$$6750 : 9, \ 7875 : 9.$$

Существуют ли еще и другие подобные деления? У кого есть желание, пусть поищет.

Число 36 обладает следующим свойством — произведение его цифр равно его половине, а сумма цифр равна его четверти. Кроме того, сумма цифр числа 36 равна сумме цифр его последовательных кратных: 72, 108, 144, 180, 216, 252 (здесь ряд обрывается...).

Сумма 36 первых последовательных натуральных чисел, то есть $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 36$, равна 666, а сумма цифр этого числа $6 + 6 + 6$ равна произведению цифр числа 36.

С числом 666 можно проделать известный фокус: увеличить его на половину, ничего к нему не прибавляя, только повернув его на 180°, то есть поставив «вверх ногами».

Следующие пары чисел 2 и 2, $1\frac{1}{2}$ и 3 обладают тем свойством, что: $2+2=2\cdot 2$ и $1\frac{1}{2}+3=1\frac{1}{2}\cdot 3$. Поищите другие такие же пары. Или загляните во вторую часть этой книги.

Как удивительно можно сократить дроби $\frac{26}{65}$ и $\frac{16}{64}$! Можно зачеркнуть шестерки в числителях и знаменателях, а величина обеих дробей совершенно не изменится. Существуют ли еще и другие такие же дроби? Наверное! Их стоит поискать.

Уже несколько раз мы приводили таблицу результатов от умножения или возведения в квадрат целого ряда чисел, в котором повторялись одни и те же цифры, вставленные во все возрастающем количестве между двумя постоянными, неизменными цифрами.

Подобное же явление можно проследить в следующих квадратах:

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111556$$
$$3334^2 = 11115556$$
$$33334^2 = 1111155556$$

В одной математической книге наборщик вместо чисел $2^5 \cdot 9^2$ набрал 2592. Корректор эту серьезную ошибку пропустил, и книга вышла в свет в таком виде. Эту книгу изучало много математиков, все предыдущие и последующие вычисления проверялись, а эту явную ошибку, пропущенную наборщиком и корректором, никто не заметил.

Как же это могло случиться?

Случилось это, или, вернее, могло случиться, потому, что $2^5 \cdot 9^2 = 2592$. Это, по-видимому, единственный в своем роде числовой курьез.

11. Умножение с помощью пальцев

Говоря об удивительных свойствах девятки, мы приводили известный способ умножения на это число с помощью пальцев. Некий сирийский автор XVII века по фамилии Беха-Эддин (1547—1622) в своей книге, очень распространенной в Персии и Индии, которая называется «О сущности счета», приводит несколько отличный, но тоже очень искусный способ умножения при помощи пальцев рук на другие числа, который необходим для тех, кто не может или не хочет запомнить таблицу умножения дальше 5.

Кто запомнил, сколько будет $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$ и так далее, вплоть до $5 \cdot 5$, тот уже может дальше не изучать этой трудной науки, ибо ему вполне хватит пальцев для выполнения более сложных умножений.

Предположим, что нам необходимо выполнить умножение $9 \cdot 8$.

Но $9 = 5 + 4$, а $8 = 5 + 3$, то есть $9 \cdot 8 = (5 + 4) \times \times (5 + 3)$.

Мы поднимаем 4 пальца одной руки и 3 пальца другой руки. Сумма поднятых пальцев $(4 + 3)$ обозначит число десятков произведения (7), а число единиц произведения мы получим, умножая загнутые пальцы одной руки на число загнутых пальцев другой руки: $1 \cdot 2 = 2$. Следовательно, в конечном результате имеем $9 \cdot 8 = 72$.

При выполнении умножения $8 \cdot 7$, что означает $(5 + 3) \cdot (5 + 2)$, следует загнуть 3 пальца одной руки и 2 пальца другой руки, а остальные пальцы выпрямить.

Сумма согнутых пальцев $3 + 2 = 5$ обозначает число десятков произведения, а произведение выпрямленных пальцев $2 \cdot 3 = 6$ обозначит число единиц искомого результата. В конечном результате получим 56. Таковы трудности подобного умножения.

Однако... однако, пожалуй, куда проще заучить таблицу умножения.

12. Некоторые разнообразия при умножении и делении

Сложение длинных столбцов чисел, особенно без помощи соответствующих машин, несомненно, одно из самых скучнейших занятий на земле. Но зачастую умножение и деление тоже может очень измучить человека.

Чтобы эти неинтересные операции хоть сколько-нибудь разнообразить, можно ввести в них некоторые небольшие видоизменения.

Так, например, когда уже надоест умножение, произведение двух чисел можно получить путем сложения. Предположим, что нам нужно умножить 43 на 213. Записываем один из приведенных здесь столбцов, объяснять которые, пожалуй, нет необходимости, и выполняем сложение:

$$\begin{array}{r} 213\\ 213\\ 213\\ 213\\ 213\\ 213\\ 213\\ \hline 9159 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 43\\ 43\\ 43\\ 43\\ 43\\ 43\\ \hline 9159 \end{array}$$

Для разнообразия мы можем проделать умножение с левой стороны, вместо того чтобы проделывать его, как принято, с правой стороны. При этом вместо перемещения каждого последующего числа произведения влево будем перемещать его вправо.

Нижеприведенный пример подробно объясняет ход действий:

```
     4235          4235
   × 3147        × 3147
   ------        ---------
    29645        12705
   16940          4235
   4235           16940
  12705            29645
  --------       ---------
  13327545       13327545
```

Любопытной разновидностью умножения, хотя заранее следует предупредить, что она вовсе не ускоряет этого действия, является следующий способ.

Предположим, что нам следует перемножить два четырехзначных числа, например 1925 на 2347. Пусть первое число будет умножаемым, а второе множителем.

Если множитель нечетное число (в нашем примере 2347), то умножаемое (1925) мы подчеркиваем, умножаем на 2 и одновременно делим на 2 множитель, причем остаток 1 отбрасываем. В нашем примере мы снова получаем нечетное число во множителе (1173), следовательно, подчеркиваем новое умножаемое (3850).

Поступаем таким образом и дальше, каждый раз подчеркивая то умножаемое, множитель которого является нечетным числом, пока не получим во множителе единицу.

Тогда все числа, подчеркнутые в столбце множимых, складываем; их сумма будет равна искомому произведению.

1925	2347
3850	1173
7700	586
15400	293
30800	146
61600	73
123200	36
246400	18
492800	9
985600	4
1971200	2
3942400	1
4517975	

Это средневековый способ умножения — путем удвоения.

Деление можно свести к вычитанию. Пусть, например, нужно разделить 1153 на 47. Частное, конечно, будет состоять из двух цифр. Цифра десятков частного укажет, сколько раз 470 содержится в делимом. В этом легко убедиться при помощи вычитания. Из 1153 вычесть 470 можно всего два раза; значит, цифрой десятков частного будет 2. Таким же путем убеждаемся, что 47 из оставшихся 213 можно вычесть четыре раза; следовательно, мы определили число единиц в частном, а в остатке получим 25.

$$\begin{array}{r|l}
1153 & 47 \\
470 & 24 \\
\hline
684 & \\
470 & \\
\hline
213 & \\
47 & \\
\hline
166 & \\
47 & \\
\hline
119 & \\
47 & \\
\hline
72 & \\
47 & \\
\hline
25 &
\end{array}$$

13. Мгновенное возведение в квадрат

Этот способ, действительно превосходный, к сожалению, применяется только для чисел, оканчивающихся на пять. Правило таково: число десятков умножается на следующее за ним большее число, а к произведению приписывается 25; например:

$$45^2 = 2025, \text{ где } 20 = 4 \cdot 5;$$
$$75^2 = 5625, \text{ где } 56 = 7 \cdot 8.$$

Объяснить это правило нетрудно. Каждое двузначное число, оканчивающееся на 5, можно представить в виде $10a + 5$, причем a является числом десятков. Теперь вычисляем:

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10a + 25 = 100a^2 + 100a + 25$, а это равно $100\,a\,(a + 1) + 25$, то есть $a(a + 1) \cdot 100 + 25$. Этот способ применять можно, конечно, не только к двузначным числам; например:

$$105^2 = 11025, \text{ где } 110 = 10 \cdot 11;$$
$$135^2 = 18225, \text{ где } 182 = 13 \cdot 14.$$

Хотя при многозначном числе необходимо отдельно выполнить на бумаге умножение числа десятков на число, на 1 большее, однако при этом всегда можно сэкономить время.

Существуют еще два правила быстрого возведения в квадрат.

1. Для чисел от 51 до 59 квадраты вычисляем следующим образом: к числу 25 прибавляем цифру единиц данного числа и к результату приписываем квадрат этой цифры единиц, например $57^2 = 3249$.

Общая формула: $(50 + m)^2 = (25 + m) \cdot 100 + m^2$.

2. Для чисел от 41 до 49 существует следующее правило возведения в квадрат: к числу 15 прибавляем цифру единиц данного числа, а к результату приписываем квадрат числа, недостающего единицам до десяти, например $46^2 = 2116$.

Общая формула: $(40 + m) = (15 + m) \cdot 100 + (10 - m)^2$.

Следует обратить внимание на то, что в обоих случаях следует писать: $1^2 = 01$; $2^2 = 04$; $3^2 = 09$.

14. Степень в прогрессии и прогрессия в степени

Очень многочисленны и очень интересны числовые комбинации с прогрессиями, а особенно с различными степенями их членов. Пока рассмотрим эти комбинации в границах арифметической прогрессии и в пределах натурального ряда чисел.

Начнем с показа очень наглядного графического способа суммирования какой-либо арифметической прогрессии.

Например, нужно найти сумму членов следующей прогрессии:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16.$$

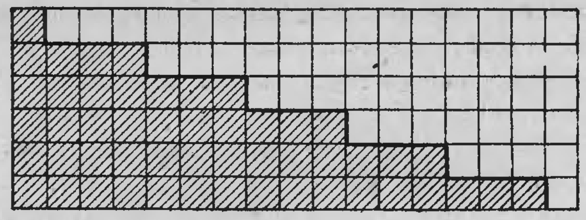


Рис. 42

Прежде всего запишем данную прогрессию в обратном порядке:

$$16,\ 13,\ 10,\ 7,\ 4,\ 1.$$

Начертим в первом ряду 1 клетку заштрихованную и 16 пустых, во втором — 4 клетки заштрихованные и 13 пустых и т. д. (рис. 42).

Совершенно очевидно, что сумма членов равна числу или заштрихованных клеток, или пустых клеток, следовательно, половине всех клеток образованного таким образом прямоугольника; эта сумма равна $6 \cdot (16 + 1)$, значит, сумма членов вышеприведенной прогрессии равна $\frac{6 \cdot (16+1)}{2} = 51$.

Самый легкий способ составления таблицы квадратов чисел натурального ряда основан на следующем.

В первом столбце поочередно записываем целые числа, начиная с 0, следовательно: 0, 1, 2, 3...

Складывая эти числа парами: $0 + 1 = 1$; $1 + 2 = 3$; $2 + 3 = 5$ и т. д., получаем последовательные нечетные числа, которые выписываем во втором столбце, на полстроки ниже первого столбца.

В третьем столбце сверху пишем 0 и прибавляем к нему ближайшее число из второго столбца, следовательно, $0 + 1 = 1$; эту единицу записываем в третьем столбце под нулем. К этому числу 1 прибавляем затем следующее число из второго столбца, следовательно, $1 + 3 = 4$; эту четверку записываем в третьем столбце. Поступая таким же образом дальше: $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 9 = 25, \ldots$, будем получать квадраты последовательных натуральных чисел:

0		0
	1	
1		1
	3	
2		4
	5	
3		9
	7	
4		16
	9	
5		25
	11	
6		36
	13	
7		49
	15	
8		64
	17	
9		81

Например, $7^2 = 6^2 + (6 + 7)$; $8^2 = 7^2 + (7 + 8)$.

А вот другая версия таблицы квадратов:

Целые числа	Полные квадраты	Первые разности	Вторые разности
0	0		
		1	
1	1		2
		3	
2	4		2
		5	
3	9		2
		7	
4	16		2
		9	
5	25		2
		11	
6	36		
7			

«Первые разности» — это разности последовательных квадратов:

$$1 - 0 = 1,\quad 4 - 1 = 3,\quad 9 - 4 = 5,\quad 16 - 9 = 7, \ldots$$

«Вторые разности»— это приращения первых разностей:

$$3 - 1 = 2,\quad 5 - 3 = 2,\quad 7 - 5 = 2,\quad 9 - 7 = 2, \ldots$$

«Вторая разность» постоянно одна и та же: 2, в то время как «нервые разности» — это последовательные нечетные числа, начиная с 3; следовательно, легко можно продолжить столбец «первых разностей». А полные квадраты вычисляются следующим способом: к последнему вычисленному квадрату прибавляется ближайшая «первая разность», следовательно:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1 + 3 = 4 \\ 3^2 &= 4 + 5 = 9 \\ 4^2 &= 9 + 7 = 16 \\ 5^2 &= 16 + 9 = 25 \\ 6^2 &= 25 + 11 = 36 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Сумма первых последовательных целых нечетных чисел, начиная с 1, всегда равна квадрату числа этих чисел:

$$
\begin{aligned}
1+3 &= 4 = 2^2\\
1+3+5 &= 9 = 3^2\\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2\\
1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2\\
1+3+5+7+9+11 &= 36 = 6^2\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49 = 7^2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Сумма квадратов трех последовательных нечетных чисел равна квадрату среднего числа, умноженному на 3 и увеличенному на 8:

$$
\begin{aligned}
1^2+3^2+5^2 &= 3\cdot 3^2+8\\
3^2+5^2+7^2 &= 3\cdot 5^2+8\\
5^2+7^2+9^2 &= 3\cdot 7^2+8
\end{aligned}
$$

Каждое простое число, которое после уменьшения на 1, делилось бы на 4, следовательно, простое число типа $4n+1$, может быть разложено на сумму двух полных квадратов; например:

$$5 = 1^2+2^2;\ 13 = 3^2+2^2;\ 29 = 5^2+2^2;\ 41 = 5^2+4^2.$$

А также квадрат такого простого числа равен сумме двух квадратов:

$$5^2 = 3^2+4^2;\ 13^2 = 12^2+5^2;\ 29^2 = 21^2+20^2;$$

$$41^2 = 40^2+9^2.$$

Кубы этих чисел тоже являются суммами двух квадратов:

$$5^3 = 11^2+2^2;\ 13^3 = 46^2+9^2;\ 29^3 = 142^2+65^2;$$
$$41^3 = 236^2+115^2.$$

При этом кубы могут быть разложены на квадраты несколькими различными способами; например, 5^3 также равно $10^2 + 5^2$. Этого нельзя сказать о первой и второй степени этих чисел.

Таблица кубов чисел натурального ряда составляется несколько более сложным способом, чем таблица квадратов.

Целые числа	Полные кубы	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			

«Первые разности» — это разности последовательных кубов:

$$1-0=1,\ 8-1=7,\ 27-8=19,\ 64-27=37,\ldots$$

«Вторые разности» — это приращения «первых разностей»:

$$7-1=6,\ 19-7=12,\ 37-19=18,\ 61-37=24,\ \ldots$$

Мы видим, что «вторые разности» постоянно возрастают на 6, а значит, «третьи разности» равны постоянному числу 6.

Чтобы составить таблицу кубов, выпишем дальнейшие кратные числа 6 в качестве «вторых разностей»:

6, 12, 18, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ..., затем записываем «первые разности», начиная с 1 и прибавляя к каждому числу следующую за ним «вторую разность»:
$1 + 6 = 7$, $7 + 12 = 19$, $19 + 18 = 37$, $37 + 24 = 61$,..., точно таким же образом получаем полные кубы:

$$
\begin{aligned}
2^3 &= 1 + 7 = 8\\
3^3 &= 8 + 19 = 27\\
4^3 &= 27 + 37 = 64\\
5^3 &= 64 + 61 = 125\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

И, наконец, несколько интересных свойств кубов.

1. Кубы чисел, оканчивающихся на 1, 4, 5, 6 и 9, тоже оканчиваются этими же цифрами; следовательно, разности таких чисел и их кубов всегда оканчиваются нулем. Кубы же чисел, оканчивающихся на 2, 3, 7 и 8, оканчиваются на 8, 7, 3 и 2; таким образом, суммы этих чисел и их кубов тоже всегда оканчиваются нулем.

2. Число, оканчивающееся некоторым числом нулей, не может быть полным кубом, если число нулей не делится на 3.

3. Каждый полный куб является или кратным числа 9, или кратным числа 9, увеличенным или же уменьшенным на единицу.

4. Составим таблицу из нечетных натуральных чисел в виде следующих групп:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^3\\
3 + 5 &= 8 = 2^3\\
7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3\\
13 + 15 + 17 + 19 &= 64 = 4^3\\
21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 = 5^3
\end{aligned}
$$

Сумма каждой из этих последовательных групп равна, как видим, кубу числа содержащихся в нем чисел. Кубы чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. графически можно представить в следующем виде, откуда, очевидно, следует их очень

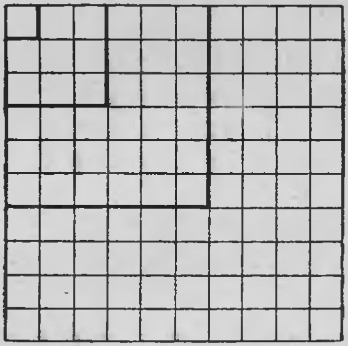


Рис. 43

любопытное свойство, а именно: сумма кубов последовательных чисел, начиная с 1, равна квадрату их суммы (рис. 43).

Итак, мы получили:

$$
\begin{array}{rl}
1+2=3 & 1^3+2^3=3^2 \\
1+2+3=6 & 1^3+2^3+3^3=6^2 \\
1+2+3+4=10 & 1^3+2^3+3^3+4^3=10^2 \\
1+2+3+4+5=15 & 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

15. Инверсия

К концу этого раздела приведем еще одну индийскую задачу. Инверсия — это одно из самых любимых развлечений индийцев, как древних, живших в давно минувшее время, так и современных; говорят, и ныне дети индийцев могут решать в уме очень сложные задачи, составленные по методу инверсии. Он заключается в том, что называется ряд действий, начинать которые следует с последнего. Древнейший из известных индийских математиков Ариабхата (V век н. э.) коротко, но точно определяет инверсию следующим образом: «Умножение становится делением, деление превращается в умножение. Приращение обращается в потерю, потеря преображается в приращение: инверсия !!!» Пример, взятый нами из Лилавати, лучше всего объяснит это: «Скажи, о прекрасная девушка с пылающими глазами, ты, которая искусно владеешь методом инверсии: как велико число, которое, будучи умноженное на 3, затем увеличенное на $\frac{3}{4}$ этого произведения, разделенное на 7, уменьшенное на $\frac{1}{3}$ частного, умноженное само на себя, уменьшенное на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, даст в результате 2?»

Решение основывается на том, что начинать нужно с конца, то есть с 2, и проделывать действия, обратные указанным в условии задачи, а именно: $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$; $\sqrt{196} = 14$, $14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 28$.

О Лилавати, прекрасная дева с глазами, сверкающими искрой гения, ты, должно быть, и в самом деле была самая необыкновенная из девушек, если умела искусно решать в уме даже такие задачи!..

III. МАГИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Общие замечания

Среди «магических фигур» пользовались и поныне пользуются самой большой популярностью магические квадраты. Это квадраты, разбитые на определенное число маленьких квадратиков, или клеток, в которые вписаны числа, представляющие собой некую прогрессию. Они размещены так, что суммы чисел вдоль каждого горизонтального ряда, каждого вертикального столбца, а также каждой из двух диагоналей всегда одинаковы.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 44

Магические квадраты были известны китайцам и индийцам уже несколько тысячелетий назад. Встречаются китайские амулеты с магическими квадратами, в которых еще нет цифр, но уже есть определенные количества проколов или углублений. Они были известны также и арабам в IX веке нашей эры. В Европу магический квадрат проник благодаря некоему греку, по имени Москопулос, который жил в Константинополе в начале XV столетия.

Самым древним магическим квадратом в Европе можно, без сомнения, назвать тот, который воспроизведен на одном из шедевров Дюрера — на гравюре «Меланхолия» (рис. 44). Этот квадрат состоит из 16 клеток, он составлен так искусно, что два центральных числа нижнего ряда указывают год создания этого произведения (1514).

И в позднейшие времена не перестали интересоваться магическими фигурами. Многие математики с увлечением работают над методами составления магических квадратов.

1. Виды магических фигур

Магические фигуры делятся на плоские и пространственные, так как существуют магические квадраты, треугольники, прямоугольники, многоугольники и круги, а также и магические кубы.

Квадраты делятся — в зависимости от прогрессии, которую образуют числа, — на арифметические и геометрические; в зависимости от числа клеток вдоль противоположных его сторон — на нечетные (3, 5, 7, 9 и т. д.), нечетно-четные (6, 10, 14, 18 и т. д.) и четно-четные (4, 8, 12, 16 и т. д.); и, наконец, в зависимости от расстановки чисел в квадрате — на магические обычные, магические с особыми свойствами и сверхмагические.

2. Общие свойства

Магический квадрат останется магическим, если все числа, входящие в его состав, увеличить или уменьшить на одно и то же число. Останется также магическим, если умножить или разделить все его числа на одно и то же число. Для более ясного понимания достаточно продемонстрировать это на одном примере (рис. 45). В первом квадрате магическая сумма, или сумма чисел вдоль каждого ряда, столбца и диагоналей, равна 15; во втором квадрате мы прибавляем по 17 к каждому числу, и волшебная сумма будет равна $15 + 3 \cdot 17 = 66$; и, наконец, в третьем квадрате умножаем все члены на 2, и магическая сумма равна $2 \cdot 66 = 132$.

Если квадрат является магическим для какой-нибудь арифметической прогрессии, то он будет магическим для так же расположенной арифметической прогрессии с другим первым членом и с другой разностью.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

19	26	21
24	22	20
23	18	25

38	52	42
48	44	40
46	36	50

Рис. 45

Так, например, в первом из приведенных волшебных квадратов вместо чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, можно соответствующим образом разместить члены прогрессии:

91, 96, 101, 106, 111, 116, 121, 126, 131.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

+

19	26	21
24	22	20
23	18	25

=

21	35	25
31	27	23
29	19	33

Рис. 46

Из всех этих правил можно извлечь очень важное практическое указание: составляя какой-либо магический квадрат, достаточно сначала составить его из простейших чисел, следовательно, из чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5,..., ибо потом путем умножения, деления, увеличения или же уменьшения этих чисел можно получить бесконечное число магических квадратов с самыми разнообразными магическими суммами.

Другой важнейшей особенностью магических квадратов является то, что из двух квадратов мы можем получить третий, складывая числа, расположенные в соответствующих полях (рис. 46). Магическая сумма такого квадрата равна сумме магических сумм обоих слагаемых: $81 = 15 + 66$.

Квадрат не утратит своих магических свойств, если переставить его столбцы и ряды, расположенные симметрично относительно центра квадрата; например, рисунок 47.

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

12	7	1	14
15	4	6	9
2	13	11	8
5	10	16	3

5	10	16	3
15	4	6	9
2	13	11	8
12	7	1	14

Рис. 47

В первом из этих квадратов мы переставили первый столбец и четвертый; возник второй квадрат, в котором сохранилась сумма членов в каждой строке и в каждом столбце, но не сохранилась сумма вдоль диагоналей. Если же теперь переставим во втором квадрате первую и четвертую строки, то получим третий квадрат, уже действительно магический.

Магическая сумма каждого квадрата, составленная из арифметической прогрессии, равна половине суммы первого и последнего члена, умноженной на число боковых клеток квадрата. Например, магическая сумма простейшего квадрата, состоящего из 9 полей, равна:

$$\frac{1+9}{2} \cdot 3 = 15$$

Сумма магического квадрата Дюрера равна:

$$\frac{1+16}{2} \cdot 4 = 34$$

3. Построение нечетных магических квадратов

Существует очень много различных методов построения магических квадратов. Среди них больше всего правил для составления нечетных квадратов и значительно меньше для нечетно-четных квадратов. Приведенные ниже правила являются относительно самыми легкими и в то же время самыми интересными.

Мы помещаем только общие принципы этих методов, умышленно не уточняя их, чтобы читатель мог по собственной инициативе самостоятельно разрабатывать их, находя новые и интересные разновидности.

22	47	16	41	10	35	4	
5	23	48	17	42	11	29	5
30	6	24	49	18	36	12	30
13	31	7	25	43	19	37	13
38	14	32	1	26	44	20	38
21	39	8	33	2	27	45	21
46	15	40	9	34	3	28	46
22	47	16	41	10	35	4	
						29	

Рис. 48

Индийский метод завещан европейским математикам уже упоминавшимся нами Москопулосом. Для примера возьмем квадрат седьмого порядка, то есть состоящий из 49 клеток. Единицу ставим в клетке, находящейся непосредственно под центральной клеткой, и, начиная от нее, вправо вниз по диагонали вписываем дальнейшие члены натурального ряда чисел (рис. 48).

Четверка окажется уже вне квадрата; переносим ее в соответствующее поле в квадрат. Пятерка выйдет тоже за квадрат, с ней поступим так же, как с четверкой. Дойдя таким образом до 7, мы наталкиваемся по пути на поле, уже занятое единицей. В этом случае мы ставим 8 под 7 двумя клетками ниже и продолжаем по тем же принципам вписывать дальнейшие числа, вплоть до 49. В результате получим квадрат с магической суммой 175.

Для упражнения стоит рассмотреть этот метод на квадрате другого порядка, ставя 1 не под центральной клеткой, а над ней и передвигаясь по диагоналям в противоположном направлении.

Сиамский метод. С ним знакомит нас Лалюбер в своем сочинении «О Сиамском королевстве». Он был послом Людовика XIV у короля Сиама и там познакомился с этим методом. Первый член прогрессии ставится в центральной клетке верхнего ряда (рис. 49), а дальнейшие члены вписываются вправо вверх. Дальше нужно поступать по предыдущему методу, с тем лишь отличием, что если, например, семерка дойдет до занятого поля, то 8 вписывается не на две клетки ниже, а сразу же под семеркой.

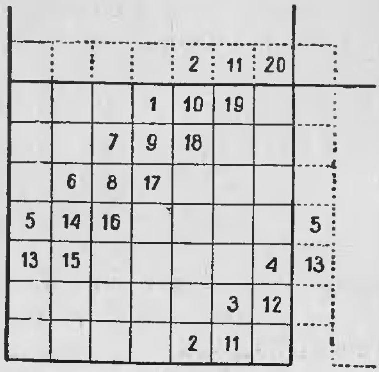


Рис. 49

Этот метод тоже рекомендуется проверить на других квадратах, помещая 1 не в верхнем, а в нижнем ряду.

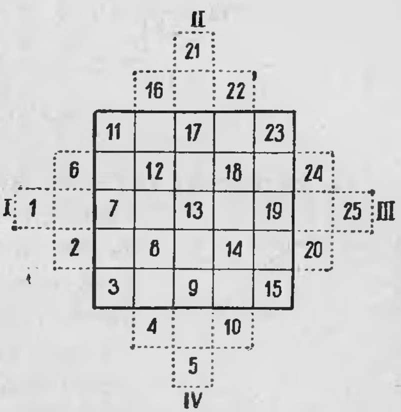


Рис. 50

Метод Баше — один из самых красивых и самых простых. Он основан на достраивании к квадрату четырех вспомогательных пирамидок со всех четырех его сторон, как это видно на приведенном здесь примере квадрата с 25 клетками, — мы получили ступенчатую симметричную фигуру (рис. 50).

Затем, начиная с какой-нибудь вершины одной из пирамидок и направляясь по линии, параллельной диагоналям квадрата, поочередно вписываем все 25 цифр, после чего цифры, находящиеся вне квадрата, переносятся в квадрат следующим образом: пирамидка I описывается вокруг цифры 19, пирамидка II — вокруг 9, и т. д.

В результате мы получим магический квадрат с суммой 65 (рис. 51). Он симметричен. Вдоль одной из диагоналей красиво располагается прогрессия: 11, 12, 13, 14, 15, со счастливым числом 13 в центре, а каждые два числа, расположенные симметрично по отношению к центру, в сумме дают 26, то есть 2 · 13.

Метод Лалюбера. Рассмотрим его на примере квадрата пятого порядка. К главному квадрату вместо пирамидок достраиваются четыре других квадрата той же величины, и в результате мы получаем фигуру, изображенную на рисунке 52. В центральное поле левого столбца вписываем единицу и, направляясь вправо вверх по диагонали, вписываем числа 2, 3, 4, 5. Вписав первую пятерку, посмотрим, что получилось.

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Рис. 51

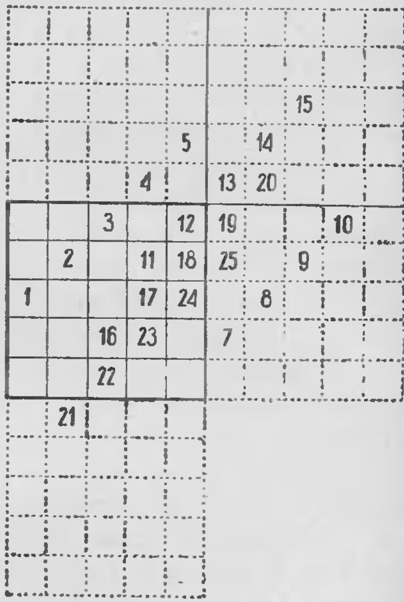


Рис. 52

Числа 4 и 5 оказались вне квадрата. Если мы каждое из них передвинем на 5 клеток вниз, то они окажутся в квадрате (см. квадрат на рис. 53).

Под новой позицией числа 5 вписываем 6 и снова, направляясь вверх вправо, вписываем 7, 8, 9, 10. Вписав вторую пятерку, видим, что числа 7, 8, 9, 10 оказались вне квадрата, переносим их в квадрат путем сдвига их на пять клеток влево. Под новым положением числа 10 вписываем 11 и дальше — 12, 13, 14, 15. Чтобы поместить в квадрате числа 13, 14, 15, нужно будет перенести их на пять клеток вниз и на пять влево. Таким образом следует поступать до конца.

19	21	3	10	12
25	2	9	11	18
1	8	15	17	24
7	14	16	23	5
13	20	22	4	6

Рис. 53

Когда мы дойдем до последнего числа прогрессии, или, как в данном случае, до 25, то все числа, находящиеся в пристроенных квадратах, переносятся в соответствующие клетки главного квадрата, и мы получаем магический квадрат, отличный от предыдущего, полученного по методу Баше. Под клеткой с числом 25 будет находиться 1.

Об одном видоизменении предыдущего метода. Вдохновившись мыслью Лалюбера, мы позволим себе предложить одну разновидность его метода, позволяющую строить симметричные магические квадраты пятого порядка. Вписываем на бумаге в клеточку последовательность чисел, размещенных следующим образом (рис. 54).

Вписав все числа в клетки, обводим жирной чертой такой квадрат, на диагонали которого будут размещены числа основной группы: 11, 12, 13, 14, 15, а затем — соответственно этому квадрату — вычерчиваем жирной чертой другие квадраты пятого порядка или их части.

Теперь уже будет нетрудно перенести все числа в основной квадрат и получить искомый магический квадрат.

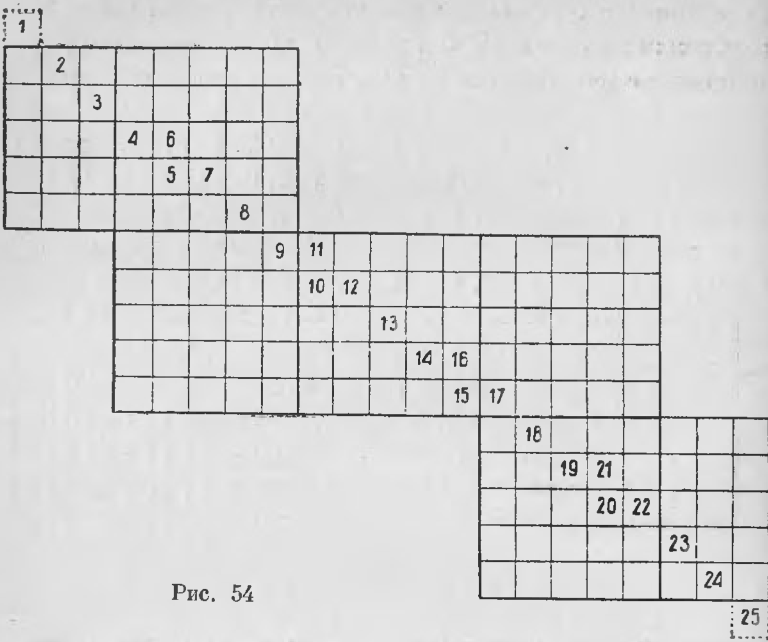


Рис. 54

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

Рис. 55

Это, как легко убедиться, симметричный магический квадрат (рис. 55).

Способ ходов шахматного коня очень оригинальный и вместе с тем легкий и интересный. На этот раз для примера возьмем снова квадрат седьмого порядка, состоящий из 49 клеток. Единицу ставим в какой-либо клетке, а 2, 3 и прочие числа вписываем над ней в клетки, на которые выпал бы ход шахматного коня. Четверка окажется уже вне квадрата, следовательно, ее нужно перенести в квадрат в соответствующую клетку, а затем уже от нее направлять ходы коня. Когда мы дойдем до семерки, а потом и до дальнейших кратных 7, то есть до 14, 21, ..., то следующие за ними цифры, то есть 8, 15, 22, вписываем в клетку,

					13		
	9			4			
7				12			7
8			3				
			11			6	
		2				14	
		10			5	15	
	1				13		
	9			4			

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	2	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	5	15	32
40	1	18	35	45	13	23	
49	9	26	36	4	21	31	
					22		

Рис. 56—57

расположенную непосредственно ниже, и от нее снова ходами коня расставляем дальнейшие числа, пока не дойдем до 49 (рис. 56—57).

4. Построение четно-четных магических квадратов

Метод Делаира. Для построения четно-четных квадратов может быть использован, правда с некоторыми изменениями, вышеуказанный метод. Первый вспомогательный квадрат заполняется числами прогрессии 1, 2, 3, 4, расставленными в первом ряду в произвольном порядке, с тем условием, что во всем квадрате числа, дополняющие друг друга, а следовательно, 1 и 4, а также 2 и 3, были размещены в соответствующих клетках, расположенных симметрично относительно центра квадрата; получим магические квадраты с суммой 10 (рис. 58).

Другой вспомогательный квадрат вместит прогрессию 0, 4, 8, 12, следовательно, начинающуюся с нуля и составленную из последовательных кратных числа делений

3	4	1	2
2	1	4	3
2	1	4	3
3	4	1	2

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

15	4	1	14
6	9	12	7
10	5	8	11
3	16	13	2

Рис. 58

боковых сторон квадрата. В первый столбец этого квадрата вписываются числа в произвольном порядке, а в следующих столбцах следует придерживаться того же, что и выше, правила симметрии. Получаем другой квадрат с суммой 24.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 59

Сложив числа, находящиеся в соответствующих клетках этих квадратов, получаем третий квадрат с магической суммой 34.

Метод Делапэ и Мондезира. Этот метод вполне современный, чрезвычайно простой и в то же время остроумный. Для большей ясности рассмотрим его на примере квадрата восьмого порядка, то есть состоящего из 64 клеток, но применять его можно также и к квадратам в 16 клеток. Заштриховав некоторые клетки на этом квадрате, как указано на рисунке, получаем что-то вроде шахматной доски (рис. 59).

Внимательный разбор приведенного здесь примера достаточно все выяснит. Полученный квадрат обладает магической суммой 260.

5. Построение нечетно-четных квадратов

Как мы уже отмечали, менее всего существует правил относительно построения квадратов этого типа и, кроме того, все существующие методы сложны и трудны для запоминания. Мы приведем здесь относительно самый легкий метод, автором которого является Делаир; но и он далек от того изящества замысла, которым отличаются методы, приведенные нами выше. Поступая подобным же образом, как и при четно-четных квадратах, мы строим вспомогательные квадраты: первый из прогрессии: 1, 2, 3, 4, 5, 6, второй из прогрессии: 0, 6, 12, 18, 24, 30. Оба эти квадрата не являются волшебными, но их диагонали дают волшебные суммы. Если мы сложим эти квадраты, то и тогда не получим еще волшебного квадрата (рис. 60).

Волшебный квадрат можно получить только после ряда перестановок, а именно: оставив на местах числа, расположенные вдоль диагоналей, перестанавливаем в первом сверху ряду и в первом слева столбце числа, которые расположены на соответствующих местах: 12 и 7, 27 и 28, 2 и 32, 17 и 23. Во втором и последнем столбце: 24 и 18, 14 и 20. В результате перестановок получим четвертый, начерченный здесь квадрат (рис. 60), в котором нужно еще переставить числа четвертого ряда и четвертого столбца: 17 и 14, 27 и 9. Тогда мы получим пятый квадрат, который, наконец, и будет магическим квадратом с магической суммой 111 (рис. 60).

Эти перестановки можно свести к трем общим правилам. Не трогая чисел, расположенных вдоль диагоналей, поочередно перестанавливают:

5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2
5	6	3	4	1	2
2	1	4	3	6	5
5	6	3	4	1	2

24	6	24	24	6	24
0	30	0	0	30	0
12	18	12	12	18	12
18	12	18	18	12	18
30	0	30	30	0	30
6	24	6	6	24	6

29	12	27	28	7	26
2	31	4	3	36	5
17	24	15	16	19	14
23	18	21	22	13	20
32	1	34	33	6	35
11	30	9	10	25	8

29	7	28	27	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
17	24	21	22	13	14
2	1	34	33	6	35
11	30	10	9	25	8

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	30	10	27	25	8

Рис. 60

1) в первом ряду и в первом столбце числа, расположенные в соответствующих клетках;

2) во втором и последнем ряду, а также во втором и последнем столбце — числа центральных клеток;

3) в одном из центральных рядов и в одном из центральных столбцов — числа крайних клеток.

Конечно, вместо первого ряда и первого столбца можно взять последний ряд и последний столбец, а также можно и перестановки 2 и 3 видоизменять, лишь бы только не трогать чисел, расположенных вдоль диагоналей. Строя магический квадрат при помощи вспомогательных квадратов, можно запланировать, что в определенной клетке будет расположено определенное число, и относительно легко достигнуть этого. Например, если мы захотим, чтобы в центральной клетке оказалась единица, тогда начнем построение первого квадрата с этой клетки и ставим в ней 1, во втором же квадрате стремимся к тому, чтобы в той же клетке оказался 0.

6. Построение магических квадратов с особыми свойствами

Метод Арну представляет собой некоторым образом переход от обычных магических квадратов к квадратам с особыми свойствами. Это, говоря точнее, правило для построения нечетных квадратов, исключительно таких, у которых число клеток каждой из сторон является кратным числа 3. И в то же время при помощи этого метода мы получаем составной магический квадрат.

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	52	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Рис. 61

IV	IX	II
III	V	VII
VIII	I	VI

Рис. 62

Лучше всего можно выяснить всё на примере. Для этого возьмем квадрат девятого порядка, то есть состоящий из 81 клетки. Разобьем его на девять квадратов по девять клеток и, беря поочередно по девять членов прогрессии 1, 2, 3, 4, 5,..., 81, строим девять квадратов третьего порядка (рис. 61), а затем размещаем их по принципам построения девятиклеточного волшебного квадрата, как указывают римские числа на рис. 62.

Если мы захотим по этому методу построить квадрат пятнадцатого порядка (15 · 15), то для размещения составляющих его магических квадратов третьего порядка мы будем применять один из методов построения нечетных магических квадратов.

Особое свойство таких составных магических квадратов заключается, конечно, в том, что не только они в целом, но и составляющие их квадраты тоже магические. Вместо того чтобы разбивать натуральный ряд чисел от 1 до 81 на девять очередных прогрессий по девять поочередных чисел, то есть 1, 2, 3, ..., 9, и дальше 10, 11, ..., 18, и дальше 19, 20, ..., 27 и так далее, из этого натурального ряда, состоящего из 81 числа, можно составить 9 прогрессий другого рода; например:

1, 10, 19, . . . , 73
2, 11, 20, . . . , 74
. . . .
9, 18, 27, . . . , 81

и из этих прогрессий строить девятиклеточные квадраты, а затем составить из них квадрат девятого порядка. И на этот раз мы получим составной магический квадрат, но уже отличный от предыдущего.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	2	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

Рис. 63

I	XV	XIV	IV
XI	VI	VII	IX
VIII	X	XI	V
XIII	III	II	XVI

Рис. 64

Четно-четные составные магические квадраты строятся подобным же способом. Чтобы построить составной магический квадрат восьмого порядка, натуральный ряд чисел от 1 до 64 делится на восемь частей, а затем из первой и восьмой части, второй и седьмой, третьей и шестой и, наконец, четвертой и пятой, то есть из дополняющих друг друга частей, составляются четыре квадрата четвертого порядка по одному из приведенных выше методов (рис. 63 и 64); каждый из них будет обладать магической суммой 130. Затем из них составляется квадрат восьмого порядка, который и будет составным волшебным квадратом.

7. Магические квадраты с геометрическими прогрессиями

Общие принципы построения квадратов на основе прогрессий не арифметических, а геометрических подобны предыдущим. Конечно, вместо ряда чисел 1, 2, 3, 4,... следует пользоваться последовательностью показателей степеней 0, 1, 2, 3, 4,..., а вместо магической суммы следует брать во внимание магическое произведение (рис. 65). Магическое произведение равно 4096.

2	256	8
64	16	4
32	1	128

Рис. 65

8. Геометрические диаграммы магических квадратов

Построение любого магического квадрата можно изобразить при помощи диаграмм, представляющих поочередное размещение чисел в клетках, причем эти линии неоднократно образуют очень любопытные фигуры. Ниже на рисунке (рис. 66) мы приводим диаграммы квадрата 4×4, двух квадратов 5×5, построенных различными методами, и необычайно симметричную диаграмму квадрата 8×8. Строение последнего квадрата советуем рассмотреть особо, подставляя числа от 1 до 64 в произвольном направлении от исходных точек, направо или налево.

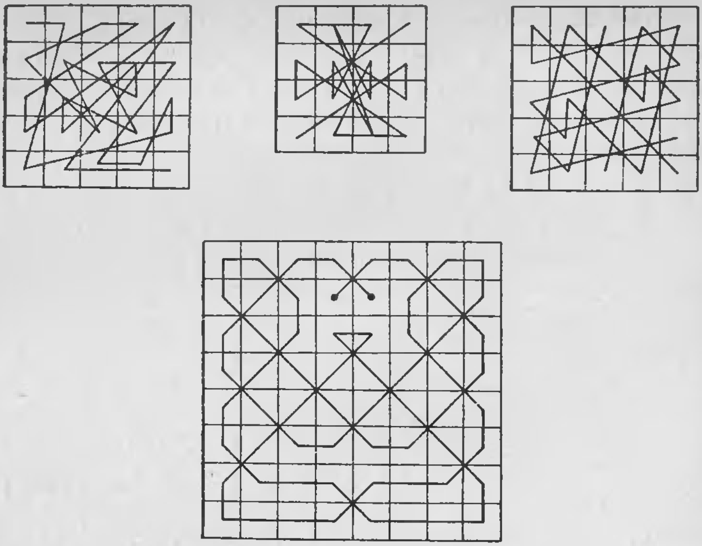


Рис. 66

9. Арифметические линии

Прежде чем мы приступим к рассмотрению сверхмагических квадратов, мы должны немного рассказать об арифметических линиях.

Присмотримся внимательно к следующей таблице (рис. 67); она состоит из 9 квадратов пятого порядка, в которые поочередно вписаны числа от 0 до 24.

Вместо 9 квадратов можно было бы взять 16, 25, ... квадратов, можно также взять квадраты не пятого порядка, а с другим числом клеток, ибо все дело не в количестве и качестве их, а в образовании некоторой числовой таблицы, размещенной в квадратах, на которой мы могли бы вычертить так называемые арифметические линии и объяснить их значение (рис. 68).

Даже без линейки и карандаша можно сразу заметить одну из арифметических линий, а именно диагональ, идущую от клетки, занятой 0, через клетку с 6, дальше с 12, 18, 24, ... Сразу же замечаем характерное свойство этой линии.

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	10	11	12	13	14	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	15	16	17	18	19	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	20	21	22	23	24	20	21	22	23	24

Рис. 67

Ряд чисел, через которые проходит арифметическая линия

$$0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \ldots,$$

можно представить в следующем виде:

$$0,\ 1 + 5,\ \ 2 + 2 \cdot 5,\ \ 3 + 3 \cdot 5,\ \ 4 + 4 \cdot 5 \ldots$$

Если исходную клетку этой линии обозначим через 0, то в первой пересеченной ею клетке будет находиться: 1 + кратное 5, во второй: 2 + кратное 5, в третьей: 3 + кратное 5, в четвертой: 4 + кратное 5, и т. д.

Вместо того чтобы мысленно проводить диагональ квадрата, возьмем лучше линейку и карандаш и соединим центр клетки, занятой 0, с центром клетки, которую занимает в этом же квадрате 16; при этом мы убедимся, что прямая, которую мы проведем и потом продолжим дальше, пройдет через самый центр многих других клеток и снова образуется некоторый ряд чисел:

$$0,\ 16,\ 7,\ 23,\ 14,\ldots,$$

которые можно записать также и в следующем виде:

$$0,\ 1+3\cdot5,\quad 2+1\cdot5,\quad 3+4\cdot5,\quad 4+2\cdot5,\ldots$$

Вновь мы получаем то же самое, что и в прошлый раз, а именно: ряд чисел, вписанных в клетки, через центры которых проходит эта арифметическая линия, состоит как бы из порядковых номеров клеток: 0, 1, 2, 3, 4, ..., плюс некоторые кратные 5. Такие прямые линии, проходящие через центры ряда клеток, мы называем арифметическими линиями. В магических фигурах, которые мы рассматривали до сих пор, мы встречались (не употребляя этого названия) с тремя видами арифметических линий, которые в магических квадратах совпадали с магическими линиями, — это были горизонтальные линии строк, с расположенными вдоль них клетками, вертикальные линии столбцов и диагонали. Сейчас мы стали рассматривать также и другие косые линии, которые можно провести в клетках квадрата, и назвали все эти линии арифметическими линиями.

Присмотритесь внимательно к помещенному рядом рисунку, на котором проведено несколько арифметических линий (рис. 68).

Расстояние между центрами двух соседних клеток, лежащими на арифметической линии, называется шагом арифметической линии.

Если вдоль сторон прямоугольника мы пронумеруем ряды клеток и столбцы (как показано на рисунке), то каждую клетку можно обозначить парой чисел, как пересечение соответствующего столбца и строки, всегда ставя на первом месте номер столбца, а на втором — номер ряда. Например, в клетке (2, 3) находится число 17, а в клетке (3, 2) — число 13.

Чтобы определить шаг линии, достаточно выписать две соседние клетки, через центры которых проходит линия, например (2, 0) и (3, 3).

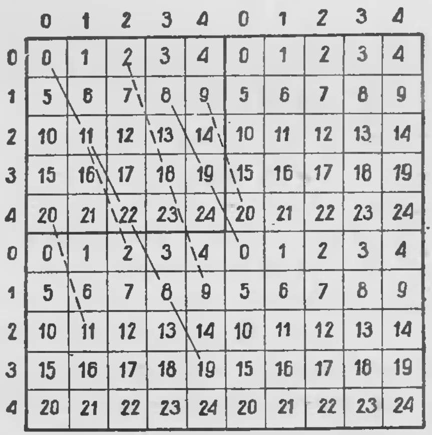


Рис. 68

На основании этой нумерации можно, вовсе не глядя на рисунок, выписать дальнейший ряд клеток, через центры которых пройдет арифметическая линия. Достаточно к номеру столбца (то есть к числу, стоящему в скобках на первом месте) постоянно прибавлять по 1 = (3—2), а к номеру ряда все время прибавлять по 3 = (3 — 0); и тогда мы получим следующие клетки:

(2,0), (3, 3), (4, 6), (5, 9), (6, 12), (7, 15),...

Часть линии, выходящей за границы первого квадрата, можем всегда свести к аналогичным шагам в том же квадрате. Например, начертим линию (0, 0) — (1, 2); она пройдет дальше через клетки (2, 4), (3, 6), (4, 8) и т. д. Отрезок этой линии, точнее, ее шаг (3, 6) — (4, 8) можно свести к шагу (3, 1) — (4, 3).

Если исходной точкой линии является центр клетки (0, 0), то, желая определить четвертую клетку арифметической линии при шаге (1, 3), достаточно взять клетку с номерами 4 · 1 и 4 · 3, что коротко можно обозначить: 4 · (1, 3), следовательно, в этих условиях вместо ряда (0,0), (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), ..., можно выписать следующий ряд:

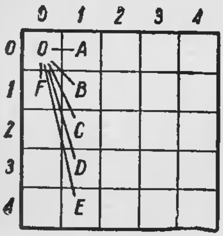


Рис. 69

$$(0,0),\ (1,3),\ 2 \cdot (1,3);$$
$$3 \cdot (1,3),\ 4 \cdot (1,3),\ 5 \cdot (1,3), \dots$$

Среди огромного количества арифметических линий, которые можно провести из различных клеток во всех направлениях, мы выделяем так называемые основные арифметические линии, обозначенные на рисунке 69. Они все начинаются в клетке (0,0) а шаги их следующие:

	шаг	(1,0)	или	*OA*
	»	(1,1)	»	*OB*
	»	(1,2)	»	*OC*
	»	(1,3)	»	*OD*
	»	(1,4)	»	*OE*
а также	»	(0,1)	»	*OF*

Всего основных арифметических линий в квадрате пятого порядка 6, то есть 5 + 1, а вообще $n + 1$, если n — число клеток в ряду или столбце квадрата.

Основные арифметические линии пройдут через следующие клетки (после перемещения их дальнейших отрезков, проходящих в другом квадрате, в аналогичные шаги в главном квадрате):

Линия OA: (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0)
» OB: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)
» OC: (0,0), (1,2), (2,4), (3,1), (4,3)
» OD: (0,0), (1,3), (2,1), (3,4), (4,2)
» OE: (0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
» OF: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4)

В результате этого сопоставления мы видим, что каждая клетка главного квадрата (рис. 70) представляет собой крайнюю точку некоторой главной линии, причем только клетка (0,0) будет общей для всех линий: ни в какой другой клетке главные линии не пересекаются.

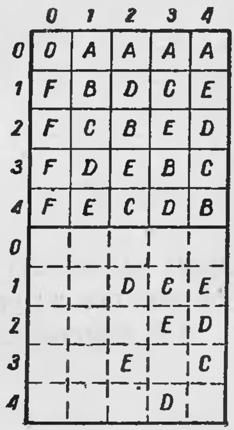


Рис. 70

Здесь мы ограничились указанием только некоторых свойств арифметических линий, необходимых для понимания «сверхволшебных» квадратов. Очень советуем читателям самостоятельно отыскать еще много других интересных их свойств. При этом, может, удастся найти кое-что новое, ну, а если даже будут получены только уже известные вещи, открытые предшественниками и записанные в теории этих линий, тем не менее это всегда принесет пользу, разовьет наблюдательность и смекалку.

10. Квадрат-«оборотень»

Мы столько говорили о различных магических и сверхмагических квадратах, что казалось бы, в этой области нас уже ничто не может ни удивить, ни поразить.

Однако посмотрите только на приведенный здесь магический квадрат. Видели ли вы что-либо подобное! Его можно читать «вверх ногами» и наоборот, и всегда он будет магическим (рис. 71).

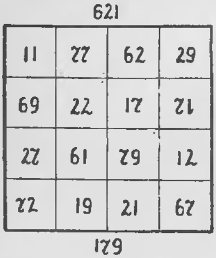
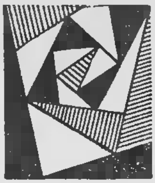


Рис. 71

11. Треугольники с магическим периметром

Волшебный треугольник является одной из самых любопытных магических фигур. Натуральные числа от 1 до 9 следует вписывать на место приведенных здесь букв таким образом, чтобы сумма квадратов чисел,



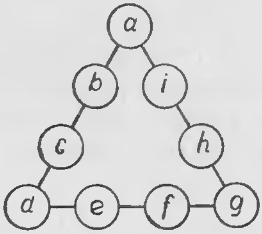


Рис. 72

расположенных вдоль каждой стороны треугольника, была всегда одна и та же (рис. 72), то есть

$$\text{чтобы}\quad (1)\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = Q;$$
$$(2)\ d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = Q;$$
$$(3)\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 = Q.$$

Складывая эти три уравнения, мы получаем:

$$a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3Q.$$

Сумма в скобках — это сумма квадратов натуральных чисел от 1 до 9. Как известно, сумма квадратов $S^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ выражается следующей формулой $S^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, откуда при $n = 9$ получим $S^{(2)} = 285$. Отсюда

$$a^2 + d^2 + g^2 + 285 = 3Q;$$

следовательно,

$$(4)\quad a^2 + d^2 + g^2 = 3(Q - 95).$$

Заметим, что если целое число не делится на 3, то его квадрат имеет следующий вид $3k + 1$. Если же сумма квадратов чисел a, d, g делится на 3, тогда одно из двух:

I. Или каждое из этих чисел a, d, g делится на 3 (значит, это будут числа 3, 6, 9).

II. Или каждое из них не делится на 3.

В случае I можно (не ограничивая при этом общности рассуждений) предположить, что $a = 3$, $d = 6$, $g = 9$. Но так как $a^2 + d^2 + g^2 = 126$, то формула (4) дает $126 = 3(Q - 95)$, откуда $Q = 137$. Тогда на основании (1) получаем $b^2 + c^2 = 92$.

Так как сумма $b^2 + c^2$ четное число, то b и c должны быть одновременно или четными, или нечетными; но, комбинируя всевозможными способами квадраты чисел 2, 4, 8 или квадраты чисел 1, 5, 7, мы не сможем получить такую комбинацию, при которой сумма этих двух квадратов $b^2 + c^2$ была бы равна 92. Следовательно, предположение I отпадает.

В предположении II рассуждаем следующим образом. Из формул (1), (2), (3) следует, что $(a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = (d^2 + g^2) + (e^2 + f^2) = (g^2 + a^2) + (h^2 + i^2)$.

Но в этом случае каждая из сумм $a^2 + d^2$; $d^2 + g^2$; $g^2 + a^2$ дает при делении на 3 одинаковый остаток 2. Отсюда заключаем, что суммы $b^2 + c^2$; $e^2 + f^2$, $h^2 + i^2$ тоже дают одинаковые остатки. Нетрудно заметить, что в состав каждой суммы входит один квадрат, который делится на 3, и один, который не делится. Не ограничивая общности, можем принять, что $b = 9^2 = 81$, $e = 6^2 = 36$, $h = 3^2 = 9$.

Сравнивая формулу (1) с формулой (2) и (3), получаем:

$$(5)\quad a^2 + c^2 + 45 = f^2 + g^2;$$
$$(6)\quad c^2 + d^2 + 72 = g^2 + i^2,$$

где квадратами являются числа 1, 4, 16, 25, 49, 64.

Формула (6) может быть реализована только в тех случаях, если $g^2 + i^2 = 64 + 49 = 113$ и $c^2 + d^2 = 41 = 16 + 25$, или же если $g^2 + i^2 = 64 + 25 = 89$ и $c^2 + d^2 = 17 = 1 + 16$.

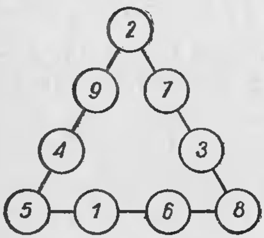


Рис. 73

Рассмотрев еще ряд случаев, приходим к выводу, что уравнения (5) и (6) могут удовлетворяться только тогда, если $g^2 = 64$, $c^2 = 16$, $a^2 = 4$, $f^2 = 1$, $d^2 = 25$, $i^2 = 49$; в результате получим треугольник такой, как на приведенном здесь рисунке (рис. 73). Сразу же замечаем его неожиданное новое свойство, а именно то, что не только сумма квадратов чисел, расположенных вдоль отдельных сторон треугольника, но и сумма этих чисел тоже постоянна:

$2 + 9 + 4 + 5 = 20$, $5 + 6 + 1 + 8 = 20$, $8 + 3 + 7 + 2 = 20$.

Следовательно, треугольник магический вдвойне с магическими суммами 20 и 126.

12. Другие магические треугольники

Для треугольников, которые мы приведем ниже, собственно говоря, не существует методов построения, тем не менее они представляют собой очень любопытные фигуры, а различные видоизменения, особенно во второй группе, побуждают к самостоятельным изысканиям, которые неоднократно приводили к интересным результатам.

I. Концентрические треугольники (рис. 74)

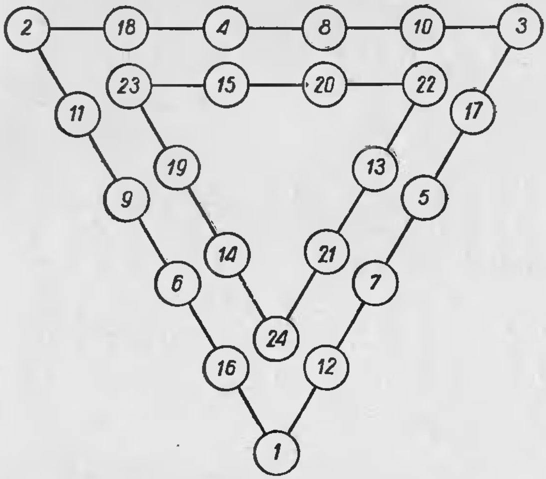


Рис. 74

Все стороны внешнего треугольника дают магическую сумму 45:

$$1 + 12 + 7 + 5 + 17 + 3 = 45$$
$$3 + 10 + 8 + 4 + 18 + 2 = 45$$
$$2 + 11 + 9 + 6 + 16 + 1 = 45$$

Магическая сумма сторон внутреннего треугольника равна 80:

$$24 + 21 + 13 + 22 = 80$$
$$22 + 20 + 15 + 23 = 80$$
$$23 + 19 + 14 + 24 = 80$$

II. Треугольники, составленные из треугольников (рис. 75, 76)

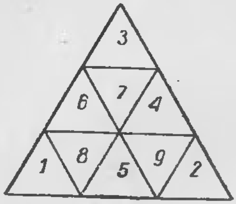


Рис. 75

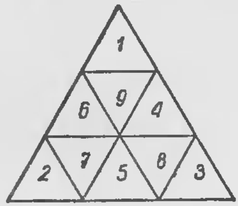


Рис. 76

$$1 + 5 + 6 + 8 = 20 \qquad 2 + 5 + 6 + 7 = 20$$
$$2 + 4 + 5 + 9 = 20 \qquad 3 + 4 + 5 + 8 = 20$$
$$3 + 6 + 4 + 7 = 20 \qquad 1 + 6 + 4 + 9 = 20$$

$$1 + 8 + 5 + 9 + 2 = 25 \qquad 2 + 7 + 5 + 8 + 3 = 25$$
$$2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25 \qquad 3 + 8 + 4 + 9 + 1 = 25$$
$$3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25 \qquad 1 + 9 + 6 + 7 + 2 = 25$$

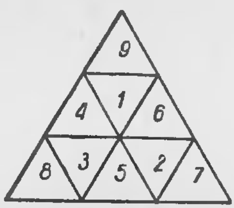


Рис. 77

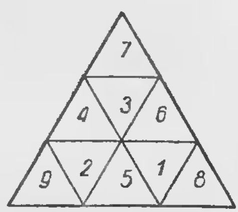


Рис. 78

$$8 + 5 + 4 + 3 = 20 \qquad 9 + 5 + 4 + 2 = 20$$
$$7 + 6 + 5 + 2 = 20 \qquad 8 + 6 + 5 + 1 = 20$$
$$9 + 4 + 6 + 1 = 20 \qquad 7 + 4 + 6 + 3 = 20$$

$$8 + 3 + 5 + 2 + 7 = 25 \qquad 9 + 2 + 4 + 3 + 7 = 25$$
$$7 + 2 + 6 + 1 + 9 = 25 \qquad 7 + 3 + 6 + 1 + 8 = 25$$
$$9 + 1 + 4 + 3 + 8 = 25 \qquad 8 + 1 + 5 + 2 + 9 = 25$$

Вышеприведенные треугольники, несмотря на проделанные перестановки, выражаются одинаковыми магическими суммами. Но также можно, как это видно по приведенным ниже примерам, путем других перестановок тех же девяти чисел, получать аналогичные треугольники, однако с другими магическими суммами.

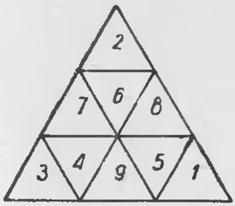


Рис. 79

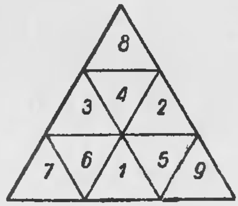


Рис. 80

$$3 + 9 + 7 + 4 = 23$$
$$1 + 8 + 9 + 5 = 23$$
$$2 + 7 + 8 + 6 = 23$$

$$7 + 1 + 3 + 6 = 17$$
$$9 + 2 + 1 + 5 = 17$$
$$8 + 3 + 2 + 4 = 17$$

$$3 + 4 + 9 + 5 + 1 = 22$$
$$1 + 5 + 8 + 6 + 2 = 22$$
$$2 + 6 + 7 + 4 + 3 = 22$$

$$7 + 6 + 1 + 5 + 9 = 28$$
$$9 + 5 + 2 + 4 + 8 = 28$$
$$8 + 4 + 3 + 6 + 7 = 28$$

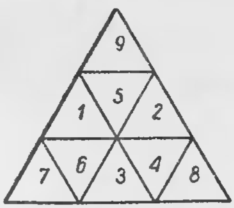


Рис. 81

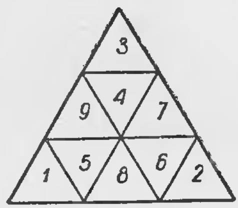


Рис. 82

$$7 + 1 + 3 + 6 = 17$$
$$9 + 2 + 1 + 5 = 17$$
$$8 + 3 + 2 + 4 = 17$$

$$1 + 9 + 8 + 5 = 23$$
$$3 + 7 + 9 + 4 = 23$$
$$2 + 8 + 7 + 6 = 23$$

$$7 + 6 + 1 + 5 + 9 = 28$$
$$9 + 5 + 2 + 4 + 8 = 28$$
$$8 + 4 + 3 + 6 + 7 = 28$$

$$1 + 5 + 9 + 4 + 3 = 22$$
$$3 + 4 + 7 + 6 + 2 = 22$$
$$2 + 6 + 8 + 5 + 1 = 22$$

Еще более любопытные свойства обнаруживают аналогичные треугольники, составленные из 16 полей:

(рис. 83)

$$6 + 12 + 13 + 7 = 38$$
$$4 + 11 + 15 + 8 = 38$$
$$5 + 10 + 14 + 9 = 38$$

$$6 + 7 + 12 + 1 + 15 + 8 + 4 = 53$$
$$4 + 8 + 11 + 2 + 14 + 9 + 5 = 53$$
$$5 + 9 + 10 + 3 + 13 + 7 + 6 = 53$$

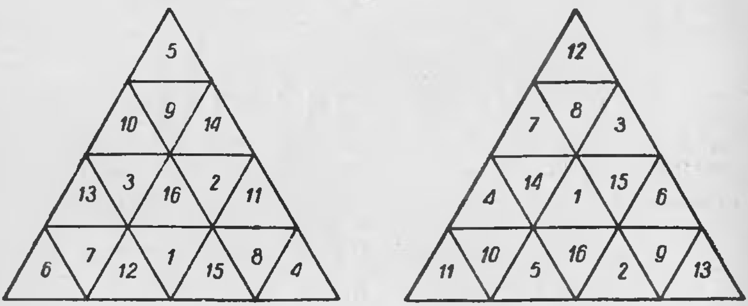


Рис. 83 Рис. 84

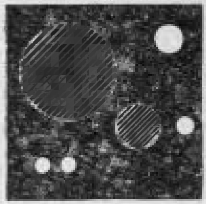
(рис. 84)

$$11 + 5 + 4 + 10 = 30$$
$$13 + 6 + 2 + 9 = 30$$
$$12 + 7 + 3 + 8 = 30$$

$$11 + 10 + 5 + 16 + 2 + 9 + 13 = 66$$
$$13 + 9 + 6 + 15 + 3 + 8 + 12 = 66$$
$$12 + 8 + 7 + 14 + 4 + 10 + 11 = 66$$

13. Магические круги

Простейший магический круг можно построить путем расстановки чисел в точках пересечения диаметров круга с концентрическими окружностями. На приведенном здесь рисунке 85 три диаметра пересекаются тремя окружностями в 18 точках. Следовательно, в этих точках необходимо расставить 18 чисел натурального ряда от 1 до 18 таким образом, чтобы сумма чисел по окружности или диаметру была всегда одна и та же. Эта магическая сумма должна быть равна:



$$\frac{18\cdot(18+1)}{2}\cdot\frac{1}{3}=3\cdot 19=57.$$

Выпишем ряд чисел от 1 до 18 следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10

Сумма каждой пары равна 19, следовательно, достаточно вписывать числа так, чтобы каждые две симметричные

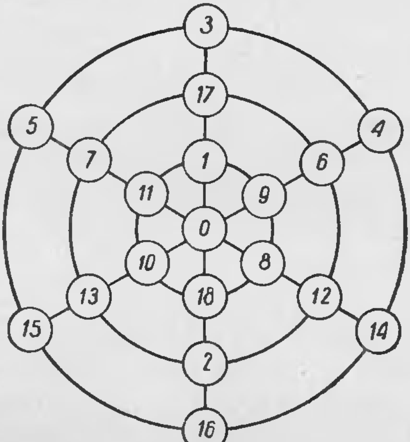


Рис. 85

точки в кругу были заняты одной парой; таким простым способом мы получим магические суммы чисел по окружности и диаметру.

Вместо трех диаметров можно начертить четыре диаметра при том же числе окружностей. Тогда точек пересечения будет $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Способ построения этого круга подобен предыдущему; однако необходимо поста-

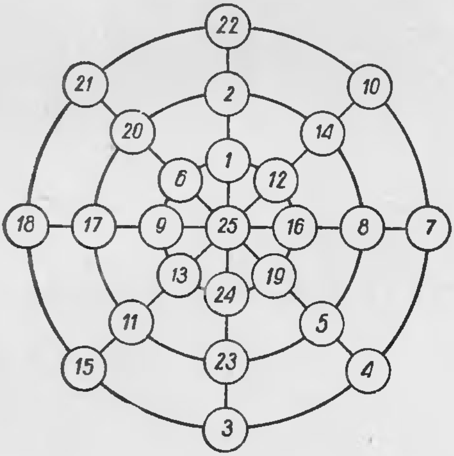


Рис. 86

вить в центре круга вместо 0 число, которое представляет собой суммы этих пар ($24 + 1 = 25$; $23 + 2 = 25$, ...), расположенных в симметричных точках, так как вдоль окружности будет 4 такие пары, а вдоль диаметра только 3 (рис. 86).

14. Магические кубы

Разобьем куб (рис. 87) на 27 маленьких кубиков. Для этого необходимо каждую сторону куба разделить на 9 квадратов и провести внутренние плоскости, соединяющие стороны этих квадратов. Куб будет *полумагическим*, если сумма чисел (размещенных внутри кубиков) будет одинакова для каждой группы 9 кубиков, расположенных в одной и той же плоскости, разделенных вертикальными или горизонтальными сечениями.

Куб будет *полностью магическим,* если и сумма чисел девяти кубиков, расположенных вдоль каждой из шести диагональных плоскостей, — тоже будет магическая.

Магическую сумму куба, разбитого на 27 частей, отыскать нетрудно. Сумма ряда чисел от 1 до 27 равна: $1 + 2 + \ldots + 27 = \frac{27 \cdot (27+1)}{2} = 378$, а магическая сумма равна $\frac{1}{3}$ этой суммы, то есть 126.

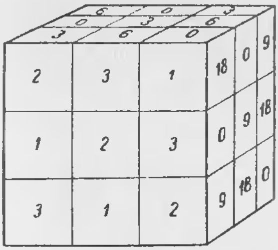


Рис. 87

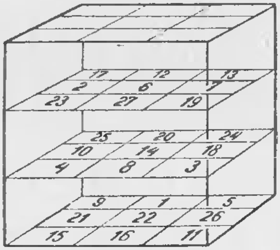


Рис. 88

Самым удобным методом расстановки чисел в волшебном кубе является соответствующим образом видоизмененный метод вспомогательных квадратов Делаира, с которым мы познакомились при построении волшебных квадратов. Разместим эти вспомогательные квадраты как бы на поверхности трех сторон куба с общей вершиной и затем для каждого кубика складываем отвечающие его сторонам числа. Так, например, для кубика, расположенного у правой нижней вершины, получим число $0 + 2 + 9 = 11$, у левой вершины число $3 + 3 + 9 = 15$, для центрального кубика $3 + 2 + 9 = 14$, и т. д.

Если бы мы тремя горизонтальными параллельными плоскостями рассекли куб через центр каждого слоя кубиков, то мы получили бы все числа, как бы выписанные на этих плоскостях (рис. 88). Мы видим, что действительно сумма чисел, лежащих в каждой плоскости, равна 126.

Мы могли бы рассечь куб вертикальными параллельными плоскостями, тогда мы получили бы группы чисел, которые, впрочем, по вышеприведенному рисунку легко найти, например, для вертикальной центральной плоскости.

Это будут числа:

$$2 + 6 + 7 + 10 + 14 + 18 + 21 + 22 + 26 = 126.$$

В другой вертикальной плоскости получим числа:

$$23 + 2 + 17 + 4 + 10 + 25 + 15 + 21 + 9 = 126.$$

Подобным же образом получим в диагональных плоскостях:

$$23 + 6 + 13 + 4 + 14 + 24 + 15 + 22 + 5 = 126$$

15. Магические звезды

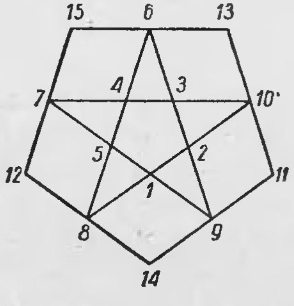


Рис. 89

$1 + 2 + 4 + 15 = 22$	$11 + 10 + 13 = 34$
$2 + 3 + 5 + 12 = 22$	$13 + 6 + 15 = 34$
$3 + 4 + 1 + 14 = 22$	$15 + 7 + 12 = 34$
$4 + 5 + 2 + 11 = 22$	$12 + 8 + 14 = 34$
$5 + 1 + 3 + 13 = 22$	$14 + 9 + 11 = 34$

$$1 + 8 + 5 + 13 = 27$$
$$2 + 9 + 1 + 15 = 27$$
$$3 + 10 + 2 + 12 = 27$$
$$4 + 6 + 3 + 14 = 27$$
$$5 + 7 + 4 + 11 = 27$$

$$6 + 15 + 7 + 4 = 32$$
$$7 + 12 + 8 + 5 = 32$$
$$8 + 14 + 9 + 1 = 32$$
$$9 + 11 + 10 + 2 = 32$$
$$10 + 13 + 6 + 3 = 32$$

$$6 + 9 + 7 + 15 = 37$$
$$7 + 10 + 8 + 12 = 37$$
$$8 + 6 + 9 + 14 = 37$$
$$9 + 7 + 10 + 11 = 37$$
$$10 + 8 + 6 + 13 = 37$$

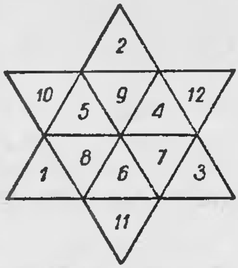


Рис. 90

$$10 + 5 + 9 + 4 + 12 = 40$$
$$12 + 4 + 7 + 6 + 11 = 40$$
$$11 + 6 + 8 + 5 + 10 = 40$$

$$2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25$$
$$3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25$$
$$1 + 8 + 5 + 9 + 2 = 25$$

$$10 + 2 + 12 + 3 + 11 + 1 = 39$$
$$5 + 9 + 4 + 7 + 6 + 8 = 39$$

IV. «ПСЕВДАРИЯ»

Общие замечания

Великий греческий математик Евклид (жил в III веке до н. э.), кроме своих знаменитых «Элементов», написал удивительную книгу «Псевдария». Она состояла из различного рода ошибочных рассуждений, которые может сделать юноша, начинающий разбираться в области математики, а в особенности геометрии. Превосходным упражнением для дебютанта в трудном искусстве мышления было отыскивание (без помощи учителя), где кроется в данном рассуждении ошибка, на чем основано заблуждение.

Этот труд Евклида до нас не дошел. Отдавая должное традиции, ниже приводим ряд разнообразных ошибочных рассуждений — паралогизмов [1], софизмов [2] и парадоксов [3] из области геометрии, арифметики и алгебры.

Некоторые из них основаны на простой оптической иллюзии, другие на иллюзиях слуховых. Например, не дослышишь что-нибудь, не заметишь некоторых пред-

[1] Паралогизм — ложно построенный вывод.

[2] Софизм — внешне формально правильное, но по существу ложное умозаключение.

[3] Парадокс — мнение, резко расходящееся с общепринятым.

посылок — принципиально изменится содержание задачи; в этом случае многое зависит не только от формы вопроса, но и от интонации, с какой произносятся его отдельные части. В других же паралогизмах ошибка кроется в самом предположении, в неправильно примененном правиле, в кажущемся неправдоподобии, в пропуске одного звена в цепи силлогизмов, в необоснованном обобщении исключительного случая, и т. д.

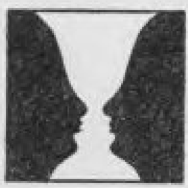
Как в предыдущих разделах, так и здесь читатель найдет большое разнообразие задач, различных по степени трудности. К одним будут даны объяснения, к другим — только небольшие указания, где нужно искать ошибку. Но будут и такие, решить которые предлагается читателям самостоятельно.

Любители точных рассуждений, поклонники логики, несомненно, будут с настоящим наслаждением охотиться в этих чащах, ведущих к абсурду, заводящих на ту ошибочную тропу, где начинается блуждание.

Что такие упражнения являются полезной умственной гимнастикой, — в этом, конечно, никого убеждать не приходится.

1. Оптические иллюзии

Оптических иллюзий существует очень много. Мы приведем здесь несколько простых примеров, представляющих



собой некоторые характерные разновидности таких иллюзий.

Иллюзия, вызванная особым расположением линий и фигур. Отрезок, расположенный вертикально, кажется длиннее, чем такой отрезок, расположенный горизонтально

Рис. 91

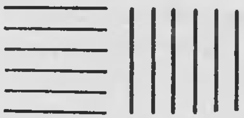


Рис. 92

(рис. 91). Квадрат, заштрихованный вертикальными линиями, кажется более широким, чем равный ему квадрат, заштрихованный горизонтальными (рис. 92).

Рис. 93

По рисунку 93 кажется, что не только нижние точки кружков расположены на кривой линии, изогнутой книзу, но также и верхние точки этих кружочков расположены на изогнутой линии. На рисунке 94 мы видим две фигуры, расположенные одна над другой. При таком расположении фигур нижний край верхней фигуры явно короче соседнего с ним верхнего края нижней фигуры; отсюда и возникает впечатление, что вся верхняя фигура меньше нижней.

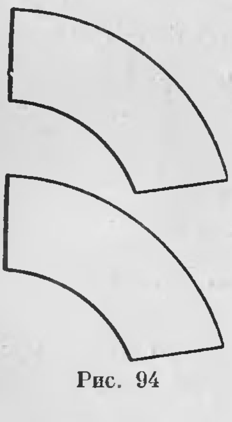


Рис. 94

Иллюзии, вызванные контрастами. Круги, расположенные в центре на рисунке 95, равны, но круг, помещенный в шести больших кругах, кажется меньше круга,

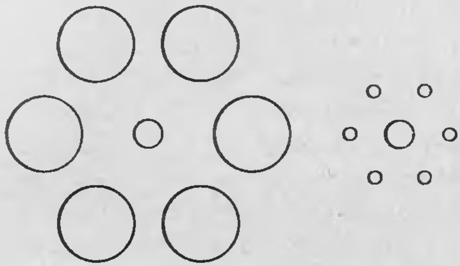


Рис. 95

окруженного шестью маленькими кругами. Вот как обманчиво воздействие контрастов окружения.

На рисунках 96 и 97 центральные углы равны, но угол, расположенный между двумя бо́льшими, чем он, углами,

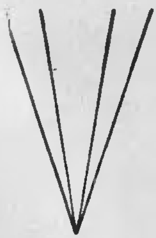


Рис. 96

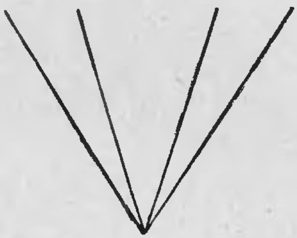


Рис. 97

как бы суживается, а угол, находящийся между двумя меньшими углами, как бы расширяется. Опять мы наблюдаем иллюзию вследствие контраста с окружением.

На рисунке 98 вертикальный отрезок кажется больше горизонтального отрезка, хотя в действительности эти отрезки равны. На рисунке 99 отрезок AB кажется значительно длиннее отрезка AC. В действительности же они равны.

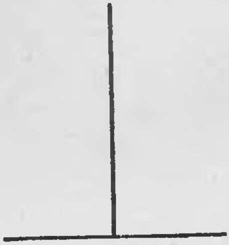


Рис. 98

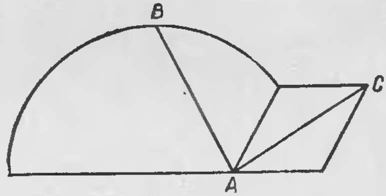


Рис. 99

Сторона AC большего треугольника на рисунке 100 кажется больше стороны $A'C'$ меньшего треугольника, а между тем $A'C' = AC$.

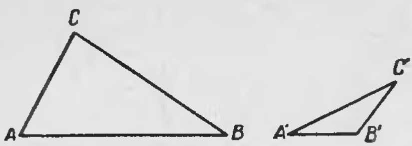


Рис. 100

Рис. 101

Иллюзии, возникшие в результате отвлечения внимания. Глядя на рисунок 101, мы понимаем, что отрезки, помещенные один под другим, параллельны и равны, однако стрелки па концах отрезков отвлекают внимание таким образом, что возникает иллюзия, будто нижний отрезок длиннее верхнего.

Пожалуй, нет человека, который не поддался бы иллюзии, что расстояние между клювами первой и второй птичек на рисунке 102 меньше, чем расстояние между клювами второй и третьей птичек. А между тем на рисунке клювы птичек находятся на одинаковом расстоянии.

Иллюзия, вызванная нарушением ритма. Прямая линия, пересеченная под достаточно острым углом двумя прямоугольными полосками, кажется рассеченной на

Рис. 102

части, не лежащие на одной прямой (рис. 103). Линии, наклонно лежащие по правую сторону полоски, после продолжения сходятся с линиями, лежащими наклонно по левую сторону, в точках пересечения с вертикальными

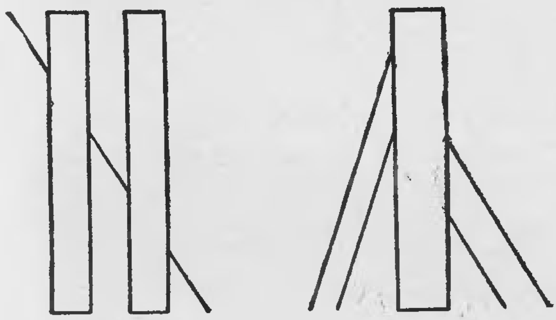


Рис. 103

сторонами полоски — вопреки впечатлению, которое получаешь, глядя на рисунок сверху.

Еще более эффектен рисунок 104. Можно сотням людей задавать вопрос, встретятся ли после продолжения дуги, расположенные по левую сторону полоски (это дуги окружностей), с концами дуг, лежащих по правую сторону, и всегда получим отрицательный ответ. Но достаточно взять циркуль и проверить, что радиусы дуг, расположенных с левой стороны, равны радиусам дуг с правой стороны. Даже после проверки невозможно избавиться от иллюзорного впечатления.

Квадрат, вписанный в круг (рис. 105), вызывает иллюзию деформации окружности: у вершин квадрата окружность кажется менее выпуклой, чем над центрами сторон квадрата.

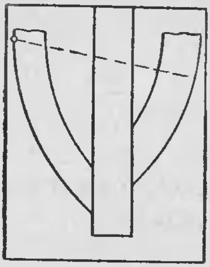


Рис. 104

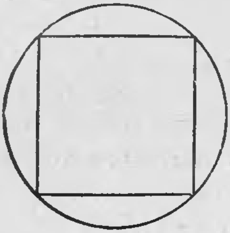


Рис. 105

Изменение ритма заштриховки по обеим сторонам полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми (рис. 106), вызывает иллюзию, что полоска или расширяется в центральной части, или суживается, в зависимости от характера заштриховки.

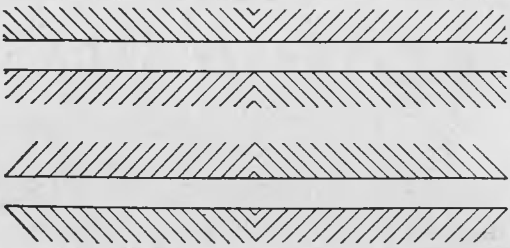


Рис. 106

Еще более поразительный эффект получается от нарушения ритма на следующем рисунке 107.

Если мы взглянем на этот рисунок снизу, «против света», таким образом, чтобы взгляд скользил по поверхности бумаги, то обнаружим, что жирные черные линии параллельны; в то время как в случае, когда

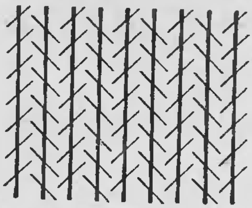


Рис. 107

смотрят на них обычно, сверху, кажется, что эти линии сходятся или расходятся, в зависимости от направления косых штрихов.

Известна также иллюзия, вызванная буквами, которые записаны при помощи ряда косых штрихов.

Слово *FLET* на рисунке 108 кажется написанным совершенно прямыми буквами. Но если мы нарисуем контуры

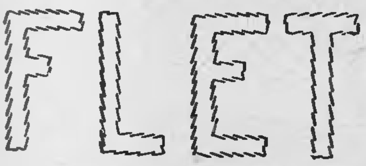


Рис. 108

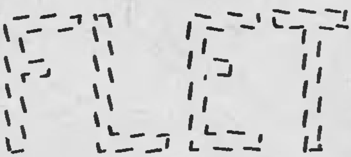


Рис. 109

букв косыми штрихами, направленными в разные стороны, то эти буквы на рисунке 109 становятся косыми. Если же мы продолжим штрихи или же на их концах дорисуем маленькие треугольники, впечатление, что они расположены косо, будет возрастать, как это видно на рисунках 110 и 111.

Но достаточно посмотреть на эти рисунки, прищурив глаза, сквозь ресницы, и покажется, что буквы снова стоят прямо.

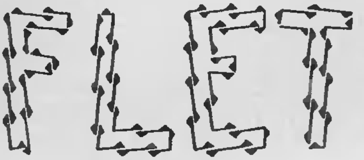


Рис. 110

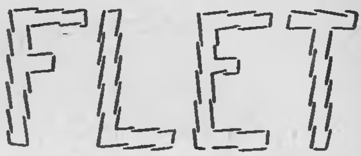


Рис. 111

Иллюзия, вызванная фоном, на котором расположены линии или фигуры. Буквы слова *FLET*, размещенные на фоне косо расположенных квадратов, кажутся невероятно

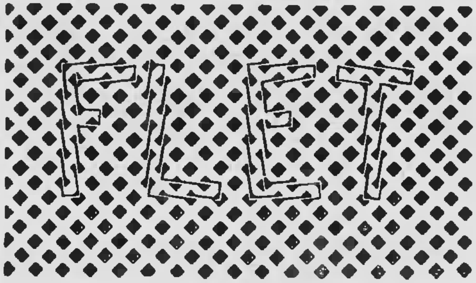


Рис. 112

пляшущими, так что никто, не проверив этого треугольником, не поверит, что они вписаны (рис. 112) прямо. Интересный опыт можно проделать с белым и серым картоном, сделав из одного что-то вроде решетки с продолговатыми отверстиями, а из другого линейку, как это показано на рисунке 113. Перемещая эту линию все более и более косо, будем получать все более четкую иллюзию сломанной линии.

Более всего невероятны иллюзии, каким мы подвергаемся, присматриваясь к фигурам на рисунках 114 и 115. На них можно смотреть часами вблизи и издали, прямо и косо, и ни на минуту мы не утратим иллюзии, что видим спиральные линии, кривые, очень далекие

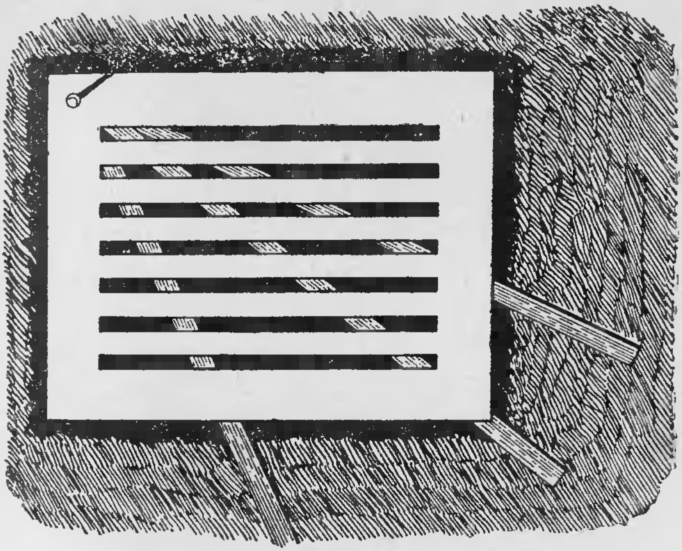


Рис. 113

от гармонической формы круга. А между тем это совершенно правильные концентрические круги.

Иллюзии, возникающие в результате контраста черное — белое. На рисунке 116 кресты одинаковые, но белый крест на черном фоне кажется больше, чем черный крест на белом фоне.

А па рисунке 117 кресты серые с одинаковым оттенком цвета, но в результате контрастов с окружением серый крест на белом фоне кажется более темным, чем такой же крест на черном фоне.

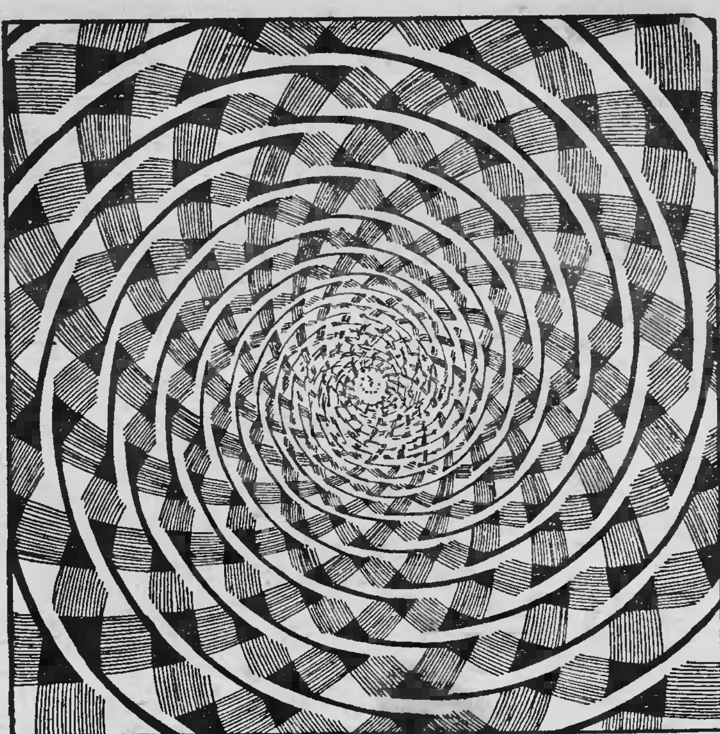


Рис. 114

А вот еще одна интересная оптическая иллюзия, вызываемая контрастом.

Между двумя верхними кругами может поместиться еще один такой же круг, а между каждым из верхних кругов и нижним кругом можно поместить ровно три круга. Однако кажется, что расстояние между верхними кругами меньше диаметра этих кругов и что между каким-либо из верхних кругов и нижним кругом поместятся, по крайней мере, четыре таких круга, особенно, если смотришь издалека (рис. 118).

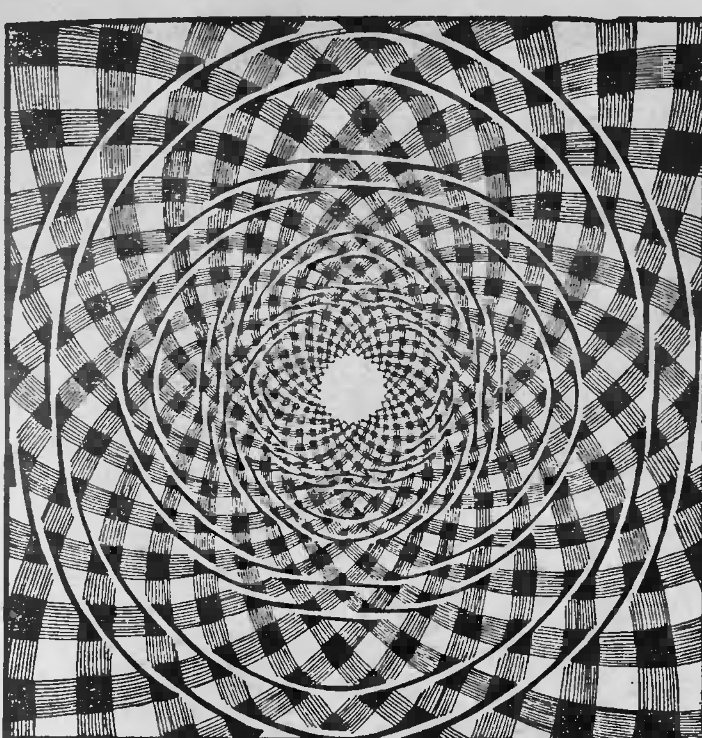


Рис. 115

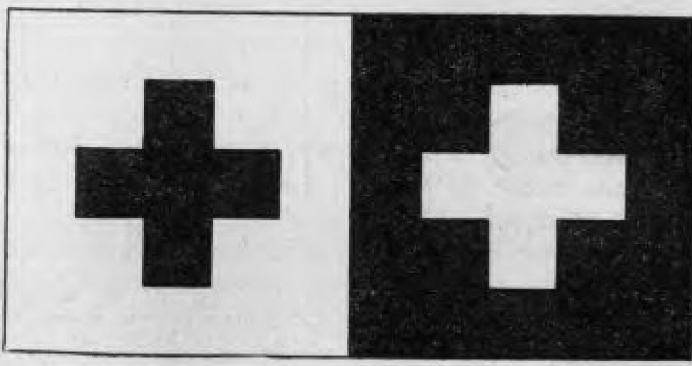


Рис. 116

Пространственные оптические иллюзии. Это иллюзии особого рода. Они вызываются некоторыми трехмерными

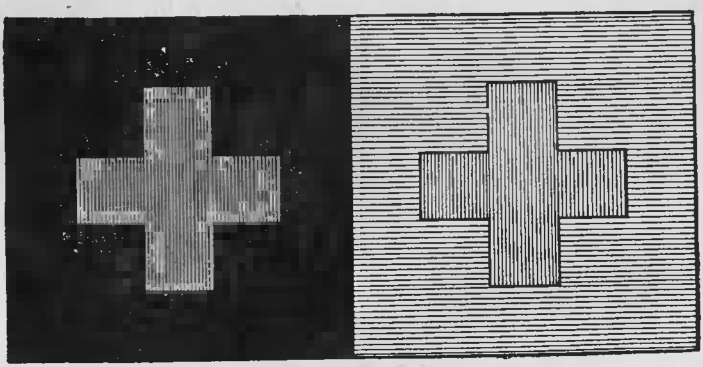


Рис. 117

Рис. 118

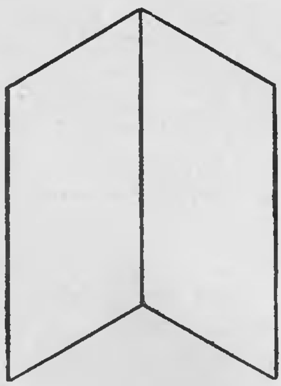


Рис. 119

фигурами: одни кажутся непрозрачными, другие — прозрачными и, наконец, третьи — то прозрачными, то непрозрачными.

На этот раз иллюзия основана на мнимой изменчивости точек зрения. Картон, нарисованный при помощи семи линий и согнутый в середине, мы видим то с внутренней стороны, то с внешней (рис. 119).

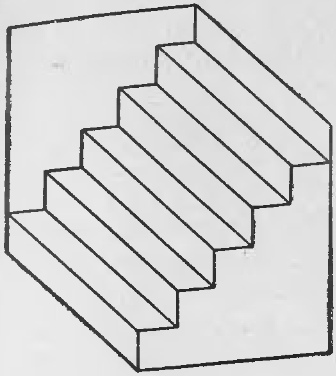


Рис. 120

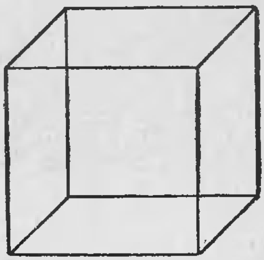


Рис. 121

На лестницу (рис. 120) мы смотрим то сверху, то снизу, как будто она представляет собой часть какого-то особенного потолка. Подобное же явление мы наблюдаем на стеклянном, вернее, на любом прозрачном кубе: то видим его как бы сверху, с правой стороны, то слева, снизу (рис. 121).

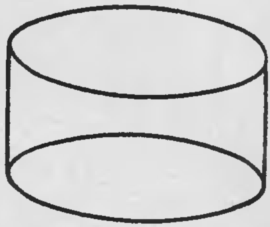


Рис. 122

А цилиндр, если представить его прозрачным, тоже может создать подобную иллюзию. А если мы будем его рассматривать как непрозрачный, то он нам представится как усеченный двумя плоскостями, наклоненными друг к другу (рис. 122).

Привычка видеть картину на плоском рисунке перспективно является причиной оптической иллюзии, которая препятствует сравнению длины отрезков па рисунке 123.

Когда мы смотрим на помещенный сбоку перспективный рисунок, мы не можем избавиться от впечатления, что отрезок AC на этом рисунке короче отрезка AB, хотя непосредственное измерение доказывает равенство этих отрезков.

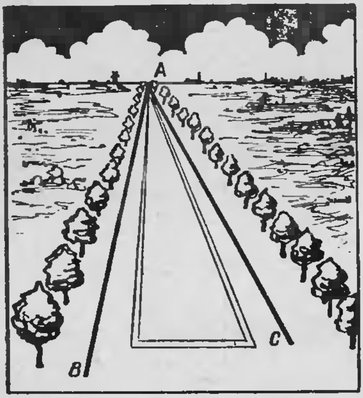


Рис. 123

2. Задачи с обманчивым решением

Капризная гусеница. В воскресенье, в 6 часов утра, одна гусеница начала вползать на дерево. В течение дня, то есть до 6 часов вечера, она забралась на высоту в 5 *м*, но за ночь сползла на 2 *м* вниз. То же самое происходило и в понедельник, и во вторник, и каждый день, ибо таковы были капризы гусеницы. Когда и в котором часу гусеница достигла вершины дерева, высота которого была равна 12 *м*?

Познакомившись с задачей, каждый хочет решить ее очень быстро и легко: за сутки — поднимаясь за день на 5 *м* и спускаясь за ночь на 2 *м* — гусеница, в общем, поднимается на 3 *м*; следовательно, до вершины дерева она доберется через 4 дня — значит, в четверг, в 6 часов утра. Но дело в том, что к этому времени гусеница уже давным-давно забудет о своем кропотливом путешествии и успеет превратиться в кокон...

Ревматические часы. Мои часы странно реагируют на перемену температуры: за день они спешат на $\frac{1}{2}$ минуты, а за ночь отстают на $\frac{1}{3}$ минуты. Вычисли быстро, о проборный математик, когда часы будут спешить на 5 минут если 1 апреля в самом начале дня они показывали время точно? Произойдет это еще в апреле!

Коты. Задача старая, но яркая. В комнате четыре угла; в каждом углу сидит кот. Напротив каждого кота сидят 3 кота, а на хвосте каждого кота сидит 1 кот. Сколько всего котов?

Уйма, не правда ли?.. Однако в этой комнате всего четыре кота.

Три кратких и легких вопроса. Дровосекам за каждое распиливание ствола платят рубль; ствол длиной 12 *м* должен быть распилен на полуметровые кругляки. Сколько заработают дровосеки?

Один землекоп в течение 8 часов выкапывает колодец площадью 1 *кв. м*, а глубиной 4 *м*. За сколько часов выкопают этот колодец 8 землекопов?

Выглянув на пересечении железнодорожных линий в окно вагона, я заметил, что передо мной 8 вагонов, а за мной — 5. Сколько вагонов в поезде, в котором я ехал?

3. Арифметические софизмы

1=2. Никто не станет возражать, что $3-1=6-4$.

Если обе части этого очевидного равенства умножим на (-1), то получим $1-3=4-6$.

К обеим частям равенства мы можем прибавить одинаковые числа:

$$1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}.$$

Обе части равенства представляют собой квадраты разностей:

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Из обеих частей равенства извлекаем квадратный корень:

$$1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}.$$

К обеим частям равенства прибавим одно и то же число $\frac{3}{2}$; имеем на это полное право. Тогда получим $1 = 2$.

2=3. Это можно доказать, рассуждая таким же самым образом. Поочередно рассмотрим следующие равенства:

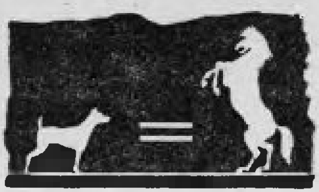
$$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4};$$

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2;$$

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2};$$

$$2=3.$$

Оба эти софизма основаны на ложных логических предпосылках. Это так же нелепо, как если бы кто-нибудь строил свои рассуждения на следующем силлогизме:



Собака — животное.

Конь — животное.

Следовательно, собака и конь — одно и то же.

В нашем случае мы применили следующий силлогизм:

Квадраты равных чисел равны.

Квадраты двух данных чисел равны.

Следовательно, эти два числа равны.

При этом не учли, что квадраты отрицательных чисел положительны, так же как и квадраты положительных чисел.

4. Алгебраические софизмы

Неточный результат, несмотря на применение аксиомы. Казалось бы, что на свете нет ничего надежнее... математических аксиом. Однако вот пример, из которого следует, что можно как будто правильно применить элементарные аксиомы к очень простым алгебраическим действиям — и получить совершенно ошибочные результаты.

Рассмотрим уравнение $x - 1 = 2$.

Применим аксиому: умножая две равные величины на ту же самую величину, получим равные произведения. Умножаем обе части нашего равенства на $x - 5$ и получаем $x^2 - 6x + 5 = 2x - 10$.

Затем, снова применяя соответствующую аксиому, вычтем из обеих частей равенства число $(x - 7)$ и получим $x^2 - 7x + 12 = x - 3$. Разделим обе части уравнения на $(x - 3)$, получим $(x - 4) = 1$. И, когда, наконец, к обеим частям равенства прибавим 4, получим $x = 5$, что является очевидной ошибкой.

Мы рассуждали вполне правильно, применяя несомненные аксиомы, в действиях, казалось бы, не допустили ни одной ошибки, а результат, однако, получили ошибочный.

Правильный результат, несмотря на ошибочные рассуждения. А теперь мы продемонстрируем, что можно явно погрешить против какой-либо аксиомы и все-таки получить совершенно безошибочный результат.

Будем исходить из того же самого уравнения $x - 1 = 2$.

Только к одной его части — о ужас! — прибавляем 10 и получаем:

$$x + 9 = 2.$$

Умножаем обе стороны на $x - 3$:

$$x^2 + 6x - 27 = 2x - 6.$$

Вычитаем из обеих сторон $2x - 6$:

$$x^2 + 4x - 21 = 0.$$

Делим обе стороны на $x + 7$ и получаем $x - 3 = 0$, или $x = 3$, что согласуется с уравнением $x - 1 = 2$.

В чем заключаются наши ошибки?

В том, что в аксиомах, которые мы применяли, не предусматривается умножения и деления на 0, а мы это проделывали, умножая и деля на $x - 3$.

Но как же можно было до решения задачи предвидеть, что $x = 3$? Поистине ошибочный круг! Как из него выбраться?

Каждое число равно своей половине.

Известно, что $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Тогда $(a + a)(a - a) = a^2 - a^2$.

Правую часть этого равенства можно записать следующим образом: $(a + a)(a-a) = a(a-a)$.

Разделим обе части на $(a-a)$ и получим $a + a = a$, то есть $2a = a$, откуда $a = \frac{1}{2} a$.

Нуль больше любого числа. Возьмем произвольное положительное число, хотя бы даже и очень большое, и обозначим его буквой a. Тогда, несомненно,

$$a - 1 < a.$$

Умножим обе части неравенства на $(-a)$; получим:

$$-a^2 + a < -a^2.$$

Прибавим к обеим частям неравенства a^2; тогда совершенно очевидно, что $a < 0$.

Хотя a согласно нашей предпосылке является числом положительным, однако оно меньше нуля.

5. Геометрические софизмы

65=64=63. Возьмем квадрат произвольной величины и разделим его стороны на 8 частей. Проведя линии, параллельные сторонам, получим 64 маленьких квадратика, заполняющих большой квадрат.

Квадрат этот разделим на четыре части, для которых, как это видно из рисунка 124, справедливы равенства: I = II, а III = IV. Если мы затем уложим эти части так, как указано на рисунках (рис. 125 и 126), то получим в первом случае прямоугольник, а во втором — многоугольник, в которых количество маленьких квадратиков, совершенно равных квадратикам первого квадрата, будет, как это легко проверить, следующее: 65 и 63. Следовательно, таким вот удивительным образом оказалось, что 65 = 64 = 63.

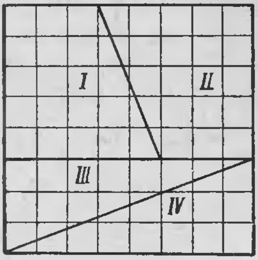


Рис. 124

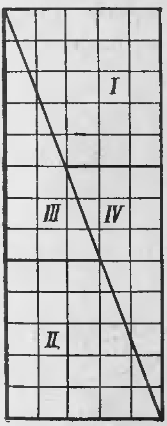


Рис. 125

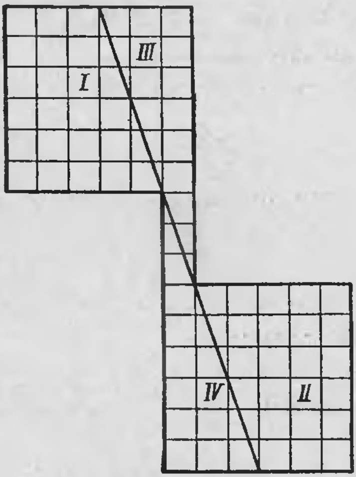


Рис. 126

Вторую часть этих равенств, то есть 64 = 63, можно доказать другим путем, и даже более простым.

Возьмем снова квадрат $8 \times 8 = 64$, разрежем его, как указано на рисунке 127, и передвинем верхнюю часть к основанию, а маленький треугольник перенесем слева сверху — вниз направо (рис. 128). Тогда получим прямоугольник $7 \times 9 = 63$. Из квадрата, насчитывающего

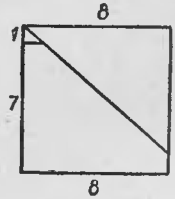


Рис. 127

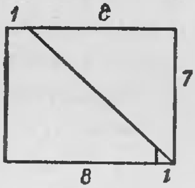


Рис. 128

64 квадратика, мы получили прямоугольник, вмещающий 63 таких же квадратика. Следовательно, $64 = 63$.

143=145. Подобным же образом можно доказать, что $145 = 143$.

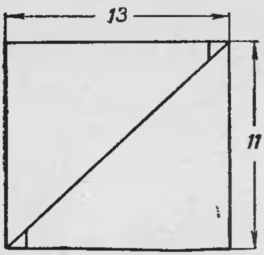


Рис. 129

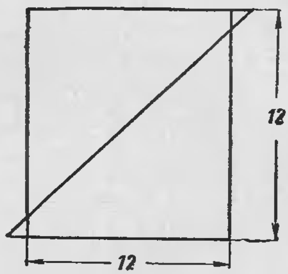


Рис. 130

На этот раз возьмем прямоугольник $13 \times 11 = 143$, разделим его диагональю (рис. 129) и верхнюю половину передвинем вправо на $\frac{1}{13}$ часть его основания. Тогда получим квадрат $12 \times 12 = 144$, а кроме того, в двух противоположных углах — два маленьких треугольника (рис. 130), которые в сумме дадут еще один, 145-й маленький квадратик. В чем заключается ошибка, сможет узнать каждый, кто вооружен рейсфедером, хорошей линейкой и треугольником.

Каждый треугольник — равнобедренный. Возьмем произвольный треугольник ABC. Проведем биссектрису угла B и линию симметрии отрезка AC (рис. 131).

Если эти две прямые не пересекутся, то они сольются в одну линию, и тогда сразу же окажется, что выбранный нами треугольник равнобедренный, а именно $AB = BC$. А если же пересекутся, то или внутри треугольника, или вне его.

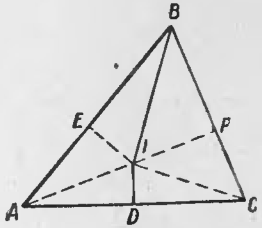


Рис. 131

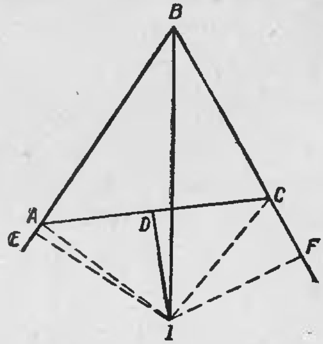


Рис. 132

При первом предположении из точки I опускаем перпендикуляры IE и IF, а также проводим линии AI и CI. Два прямоугольных треугольника BIE и BIF (рис. 131) имеют равные углы при вершине B и общую сторону BI, а значит, они равны; следовательно, $BE = BF$. Два других прямоугольных треугольника AIE и CIF также равны, так как у них равны гипотенузы $IA = IC$, а также $IE = IF$. Отсюда следует, что $AE = CF$. Если теперь к двум равным отрезкам $BE = BF$ прибавим два равных отрезка $EA = FC$, то в сумме получим также два равных отрезка, а именно $BA = BC$. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный.

Исходя из другого предположения, поступаем аналогично и получаем такой же результат, с тем лишь отличием, что вместо складывания двух пар равных отрезков нам приходится вычитать такие отрезки; полученная разность обнаружит, что в этом случае произвольно взятый треугольник является равнобедренным (рис. 132).

Опровержение этого паралогизма основано на доказательстве того, что: 1) точка I не может лежать внутри треугольника; 2) из двух перпендикуляров, опущенных из точки I на стороны BA и BC, только один может пересечь продолжение соответствующей стороны, а второй перпендикуляр должен пересечь самую сторону.

Если через вершины рассматриваемого нами треугольника проведем окружность, то как линия симметрии отрезка AC, так и биссектриса угла B должны пересечь дугу AIC в ее центре, то есть точка их пересечения I лежит на окружности, а значит, вне треугольника (рис. 133).

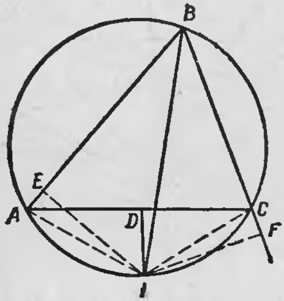


Рис. 133

Во-вторых, если предположим, что перпендикуляр из точки I на сторону BC пересечет эту сторону в точке F, лежащей на ее продолжении, то угол BCI — тупой. Но углы BCI и BAI являются углами, дополняющими друг друга до $180°$, следовательно, по необходимости угол BAI должен быть острым; а значит, основание перпендикуляра, опущенного из точки I на AB, должно находиться между A и B. Поэтому не может получиться так, чтобы обе точки, C и F, лежали па продолжении соответствующих сторон.

В каждом треугольнике одна сторона равна сумме двух остальных. Этот софизм основан не на ошибочности рисунка, а на ошибочном рассуждении, поэтому его опровергнуть труднее.

Пусть в произвольном треугольнике ABC точки D, E, F будут центрами его сторон. Проводим линии DF и EF.

Известно, что $DF = \frac{1}{2} BC = BE$ и $EF = \frac{1}{2} AB = BD$.

Таким образом, длина ломаной линии $ADFEC$ равна $AB + BC$.

Если этот же прием повторим в обоих только что полученных треугольниках, то, несомненно, длина ломаной линии $AGHIFJKLC$ будет равна $ADFEC$, то есть $AB + BC$.

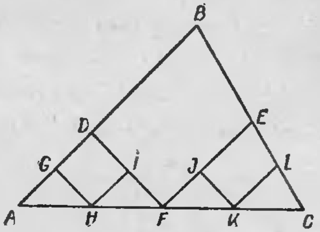


Рис. 134

Если этот прием будем повторять бесконечное число раз, то заметим, что вершины этой ломаной линии будут приближаться к линии AC, и в конце концов ломаная линия сольется с линией AC. Следовательно, $AC = AB + BC$ (рис. 134).

6. Кажущееся неправдоподобие

Качение круга по кругу. Возьмем два равных круга, например две одинаковые монеты, одна пусть будет неподвижна, а другой станем катить по краю неподвижной монеты. Сколько раз обернется вокруг своей оси монета, которую мы будем катить, прежде чем опишет полный круг вокруг неподвижной монеты?

Каждая точка ее края соприкоснется при описании полного круга только один раз с соответствующей точкой края неподвижной монеты. Итак, теоретически кажется совершенно понятным, что монета сделает один оборот, а между тем на самом деле за это время она обернется два раза. В этом легко убедиться на опыте или же из рассмотрения аналогичного вращения треугольника вокруг треугольника или квадрата вокруг квадрата.

Земной экватор, увеличенный на 10 метров. Предположим, что земной шар обтянут по экватору громадным железным обручем, плотно прилегающим к земной поверхности. Если к этому обручу, длина которого равна длине экватора, то есть около 40 072 000 *м*, прибавим еще 10 *м*, то сможет ли через щель, которая в результате этого образуется между Землей и обручем, проскользнуть обыкновенная мышь?

Большинство, после некоторых раздумий, несомненно, ответит на этот вопрос утвердительно. И в то же время почти каждому покажется совершенно невероятным утверждение, что под обручем пройдет не только мышь,

но и кот, и пес, и даже человек невысокого роста. А однако... однако легкое для проверки вычисление, проделанное по известной формуле $C = 2\pi R$, должно убедить каждого в верности этого неправдоподобного предположения.

Пусть R означает радиус экватора Земли. Тогда длина экватора C будет выражаться формулой $C = 2\pi R$. По этой формуле можно будет вычислить радиус Земли, разделив C на 2π.

Мы получим $R = \frac{C}{2\pi}$.

Длина обруча равна $C + 10$ *м*; каков же его радиус? Используя ту же формулу, вычислим радиус:

$$R_1 = \frac{C + 10\,м}{2\pi}.$$

Эту формулу можно преобразовать следующим образом:

$$R_1 = \frac{C}{2\pi} + \frac{10\,м}{2\pi}, \text{ то есть } R_1 = R + \frac{10\,м}{2\pi}.$$

Разность $R_1 - R$ определит высоту прохода между Землей и обручем. Разделив 10 *м* на 2π, определим эту высоту. Она равна 1,59 *м*.

Обруч будет соответствовать окружности круга, который бы описал нос человека, прошедшего вдоль экватора, если все это время нос находился на высоте 159 *см* от Земли. Дорога, проделанная носом, была бы на 10 *м* длиннее дороги, проделанной ногами. Кто не верит, пусть проверит сам.

Земля и апельсин. Представим себе, что Земля по экватору обтянута серебряной проволокой и такой же проволокой обтянут апельсин. Предположим далее, что к длине одной и другой проволоки мы прибавили еще по метру проволоки. Тогда обе проволоки немного отодвинутся — одна от Земли, вторая — от апельсина; следовательно, между проволокой и поверхностями земного шара и апельсина образуется щель. Пусть кто-нибудь угадает, в каком случае она окажется большей!

Расстояния, на которые отодвинутся обе проволоки, будут совершенно одинаковы!

Обозначим длину экватора Земли буквой C, а длину периметра апельсина — c. Тогда радиус земного шара будет равен $R = \frac{C}{2\pi}$, а радиус апельсина $r = \frac{c}{2\pi}$. Если к длине обеих окружностей прибавим по метру, то их новые радиусы будут:

$$\frac{C + 1\,м}{2\pi} \quad и \quad \frac{c + 1\,м}{2\pi}.$$

Если от этих новых радиусов мы вычтем первоначальные радиусы, то получим:

для Земли $\frac{C + 1\,м}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1\,м}{2\pi}$;

для апельсина $\frac{c + 1\,м}{2\pi} - \frac{c}{2\pi} = \frac{1\,м}{2\pi}$.

V. ОТГАДЫВАНИЯ

Общие замечания

Это было самое любимое математическое развлечение в XVII и XVIII веках. Способность отгадывать задуманное число, результат арифметических действий, считалась в те времена чуть ли не колдовством.

Теперь мы знаем, что эти отгадывания основаны на очень простых свойствах некоторых чисел и математических действий, о которых мы уже говорили во второй главе. Однако и теперь такие фокусы являются великолепными развлечениями в товарищеском кругу, они вызывают искреннее изумление и общий интерес.

В этой главе, так же как и в предыдущих, сущая беда с избытком материала. Поэтому и здесь нужно будет тоже сделать некоторый отбор материала, откладывая более трудные задачи для второй части этой книги. Мы постараемся дать хоть несколько различных видов этих интересных и поучительных задач.

Для большей краткости, чтобы иметь возможность привести больше разнообразных задач, мы поместим угадывания в виде лаконичных указаний, какие обычно дает отгадчик, а затем разъясним их короткими примерами или алгебраическими формулами, вскрывающими теоретическую основу этих отгадываний.

Прежде чем приступим к изложению материала, необходимо сделать еще одно короткое замечание. Известно, как часто, особенно из женских уст, можно услышать выражение: «это меньшая половина», «это большая половина». Математики обычно высмеивают или порицают эту привычку. А между тем эти выражения не так уж нелогичны, как это кажется многим. С этими понятиями мы должны не только согласиться, но и научиться их применять, так как некоторые отгадывания основаны именно на этих выражениях. Итак, условимся называть меньшей половиной нечетного числа ту его часть, которая на единицу меньше остальной части, то есть большей половины этого же числа; например, 3 будет меньшей, а 4 большей половиной числа 7.

1. Угадать зачеркнутую цифру

1. Напишите или — если умеете в уме выполнять простые арифметические действия — задумайте произвольное число. Припишите к нему 0, отнимите задуманное число, прибавьте 117, в полученном числе зачеркните одну цифру, но не зачеркивайте нуля; результат сообщите мне, и я тотчас же скажу вам, какую цифру вы зачеркнули.

Например, партнер вычисляет:

$$518;\ 5180;\ 5180-518 = 4662;\ 4662 + 117 = 4779;\ 4*79.$$

Отгадывающему называют цифры: 4, 7, 9. Сумма их равна 20. Отгадывание основано на быстром вычислении, что самым ближайшим кратным 9, большим суммы данных цифр, будет 27; следовательно, было зачеркнуто 7.

Совершенно очевидно, что вместо 117 можно предложить прибавить другое кратное 9.

2. Задумайте число, отнимите от него сумму его цифр, в полученном результате как угодно переставьте цифры, прибавьте к полученному таким образом новому числу 23, зачеркните одну из цифр меньше 9, назовите мне сумму оставшихся цифр, и я тотчас же скажу, какое число вы зачеркнули.

Например, партнер вычисляет:

$$8789;\ 8+7+8+9 = 32;\ 8789-32 = 8757;$$
$$7785;\ 7785+23 = 7808;\ 7 * 08;\ 7+8 = 15.$$

Отгадывающему сообщается число 15. От этого числа отнимаем 5, остается 10. Ближайшее большее число, которое делится на 9, это 18, а так как 18—10 = 8, следовательно, была зачеркнута цифра 8. Этим путем нельзя получить однозначного ответа, если зачеркнутой цифрой будет 0 или 9; но так как мы запретили зачеркивать девятку, то задача всегда будет иметь однозначный ответ.

Если от какого-либо числа мы отнимем сумму его цифр, то получим число, сумма цифр которого делится на 9. От суммы оставшихся цифр 5 вычитается потому, что число, которое прибавляем — в данном случае 23,— при делении на 9 дает остаток 5. Однако вместо 23 можно предложить прибавить какое-либо другое число, остаток которого при делении на 9 известен угадывающему.

Если вместо 8 зачеркнуть 0, то останется 78 * 8. Сумма оставшихся цифр: 7+8+8 = 23. Отгадывающий отнимает 5; 23—5 = 18. Число 18 делится на 9, следовательно, зачеркнутым числом могло быть или число 9, или 0.

Однако по условию цифру 9 зачеркивать нельзя, следовательно, был зачеркнут 0.

3. Напишите какое-либо число, сумму его цифр умножьте на 80 и прибавьте к написанному числу; зачеркнув одну цифру — не больше 8, назовите мне оставшиеся, а я скажу, какую цифру вы зачеркнули.

Например:

$$435;\ 4+3+5 = 12;\ 80 \cdot 12 = 960;$$
$$435 + 960 = 1395;\ 1*95.$$

Отгадывание: $1+9+5=15$. Ближайшим кратным 9 является 18; $18-15=3$, следовательно, зачеркнута была цифра 3.

В условии задачи можно предложить, чтобы вместо 9 не зачеркивали 0.

4. Напишите четырехзначное число, произвольно переставьте в нем цифры, разность этих двух чисел умножьте на 67, зачеркните любую цифру, только не 0, и назовите остальные.

Например:

$$3416;\ 6413;\ 6413-3416=2997;$$
$$67\cdot 2997=200799;\ 2007{*}9.$$

Отгадывание: $2+7+9=18$. Это кратное 9, а так как не мог быть зачеркнут 0, следовательно, зачеркнули 9.

Вместо 67 в подобпого рода задачах можно взять другое число.

5. Возьмите какое-либо целое число и умножьте его на число, которое непосредственно за ним следует, а полученное произведение умножьте на сумму обоих чисел; это второе произведение возведите в квадрат; когда назовете мне все цифры окончательного результата, кроме одной, я скажу, какую цифру вы утаили.

Например:

$$10\cdot 11=110;\ 110\ (10+11)=2310;$$
$$2310^2=5336100;\ 53{*}6100.$$

Угадывание основано на том, что построенное нами произведение $n\ (n+1)\ (2n+1)$ всегда делится на 3 и даже на 6, а его квадрат делится на 9. Весь фокус заключается в том, что нужно отыскать ближайшее кратное 9 и вычесть из него сумму названных цифр.

Если же в условии задачи не оговаривается, что нельзя зачеркивать 0 или 9, в ответе можно это учесть и, определив, что сумма остальных цифр делится на 9, ответить, что зачеркнуты 0 или 9.

6. Из избранного числа путем перестановки цифр составьте два других, найдите сумму этих трех чисел и возведите ее в квадрат, а потом спросите, какую цифру вы утаили, назвав все остальные.

Например:

$$215;\ 152;\ 512;\ 215 + 152 + 512 = 879;$$
$$879^2 = 772641;\ 7*2641.$$

Отгадывание совершенно похоже на предыдущее.

7. Три числа, непосредственно следующие друг за другом, перемножьте, произведение возведите в квадрат, а я угадаю ту цифру, которую вы утаите, при условии, что вы назовете мне сумму остальных цифр.

Например:

$$11,\ 12,\ 13;\ 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716;\ 1716^2 = 2944656;$$
$$29*4656.$$

Отгадывание основано на том, что сумма трех последовательных натуральных чисел всегда делится на 3, следовательно, квадрат этой суммы делится на 9.

8. Выберите три последовательных числа натурального ряда, возведите их в куб, сложите и назовите мне сумму цифр полученной суммы без одной цифры, а я сразу же назову вам эти цифры.

Например:

$$5,\ 6,\ 7;\ 5^3 + 6^3 + 7^3 = 684;\ 68*.$$

Отгадывание основано на том, что сумма трех последовательных кубов всегда делится на 9.

2. Отгадать результат действий с неизвестными числами

1. Возьмите любое нечетное число, не делящееся на 3; возведите его в квадрат, прибавьте 17, разделите на 12, а я заранее предскажу вам, какой вы получите остаток от деления. Это будет 6.

Пример:

$$11;\ 11^2 = 121;\ 121 + 17 = 138;\ 138 = 11 \cdot 12 + 6.$$

2. К произвольному числу прибавьте 11, сумму умножьте на 2, от произведения отнимите 20, то, что получите, умножьте на 5, от полученного числа вычтите умноженное на 10 первоначальное число, а я скажу вам, что в окончательном результате вы получите 10.

Пример:

$$23;\ 23 + 11 = 34;\ 2 \cdot 34 = 68;\ 68 - 20 = 48;\ 5 \cdot 48 = 240;$$
$$240 - 230 = 10.$$

Алгебраическая формула для этого отгадывания выражается следующим образом: $5 \cdot [2\,(n + 11) - 20] - 10n = 10$.

3. Возьмите число, составленное из трех таких цифр, чтобы первая и последняя отличались более чем на 1; запишите число в обратном порядке, вычтите одно из другого, запишите в обратном порядке полученный результат, сложите оба последних числа — и всегда получите 1089.

Например:

$$326;\ 623;\ 623 - 326 = 297;\ 297 + 792 = 1089.$$

4. Произвольное число умножьте на 37, к произведению прибавьте 17, сумму умножьте на 27, прибавьте 7, разделите результат на 999 — и всегда получите остаток 466.

Пример:

$$3;\ 3\cdot 37 = 111;\ 111 + 17 = 128;\ 128\cdot 27 = 3456$$
$$3456 + 7 = 3463;\ 3463 : 999 = 3\cdot 999 + 466.$$

Вместо чисел 17 и 7 можно взять другие, например a и b, однако с тем условием, чтобы $27a + b < 999$. Тогда при неизвестном n получим $27(37n + a) + b = 999n + (27a + b)$ и при делении на 999 будет остаток $27a + b$, который можно вычислить заранее.

5. Любое число умножьте на 18, прибавьте к произведению 291, сумму разделите на 3, из произведения вычтите шестикратное первоначально задуманное число, результат умножьте на число, непосредственно следующее за ним, — и я могу предсказать, что если вы не ошибетесь при вычислении, то в результате получите 9506.

Пример:

$$13;\quad 18\cdot 13 = 234;\quad 234 + 291 = 525;\quad 525 : 3 = 175;$$
$$175 - 6\cdot 13 = 97;\ 97\cdot 98 = 9506.$$

Не мешает добавить, что как в этом случае, так и во всех предыдущих и последующих, в которых действия начинаются с совершенно произвольными числами, можно — чтобы слушателям было труднее разобраться, на какой основе строятся данные угадывания, — предложить с самого начала проделать разнообразные действия с избранным числом и только после некоторого числа таких добавочных операций приступить, не заостряя на этом внимания, к истинному условию задачи.

6. Изберите два трехзначных числа, запишите меньшее из них сразу же за бо̀льшим, а затем наоборот: на первом месте напишите меньшее, а за ним большее. В результате получите два шестизначных числа. Отнимите от первого второе, полученный результат разделите на разность

избранных вами чисел: можно вас уверить, что оно разделится без остатка, а в частном вы получите 999. Вот пример:

$$873;\ 451;\ 873451-451873 = 421573;\ 873 - 451 = 422;$$
$$421578 : 422 = 999.$$

7. Изберите три цифры, составьте из них шесть разных двузначных чисел, сумму этих чисел разделите на сумму взятых вначале цифр. Когда вы выполните все действия, я назову вам результат: 22.

Вот пример:

$$3,\ 4,\ 8;\ 34,\ 38,\ 43,\ 83,\ 48,\ 84;$$
$$34 + 38 + 43 + 83 + 48 + 84 = 330;$$
$$3 + 4 + 8 = 15;\ 330 : 15 = 22.$$

8. Напишите произвольное четырехзначное число. прочтите его мне, запишите под ним число, которое я вам продиктую, а под вторым запишите третье, избранное вами; потом я назову вам число, придуманное мною, и, наконец, вы запишете пятое число. Но, прежде чем вы успеете его написать, если только назовете его мне, я тотчас же продиктую вам сумму всех пяти чисел.

Угадывание основано на том, чтобы к двум первым числам продиктовать два, представляющие собой их дополнения до 9999; тогда сумма всех пяти чисел будет равна пятому числу, уменьшенному на 2, с дописанной двойкой на месте десятков тысяч. Вот пример:

$$\begin{array}{rl}
 & 3854 \\
 & 6145, \text{ так как } 9999 - 3854 = 6145; \\
+ & 2791 \\
 & 7208, \text{ так как } 9999 - 2791 = 7208; \\
 & \underline{5739} \\
 & 25737, \text{ или } 5739 - 2 + 20000.
\end{array}$$

3. Отгадать задуманное число

При подобного рода отгадываниях особенно желательно (конечно, только в тех случаях, в которых действия совершаются с произвольным числом) предлагать различные добавочные операции и только после этого приступать к выключению настоящего условия задачи, так как слишком простые комбинации могут быть легко раскрыты сообразительными партнерами.

1. Возьмите половину задуманного числа (если вы избрали число нечетное, возьмите его меньшую половину), прибавьте 1, сумму умножьте на 4, отнимите задуманное число и скажите, чему равна разность, а я назову число, которое вы избрали.

Отгадывание: если было названо четное число, то первоначально задуманное число на 4 меньше его, а если названо нечетное число, то задуманное число меньше его на 2.

Примеры:

a) $22;\ 22 : 2 = 11;\ 11 + 1 = 12;\ 4 \cdot 12 = 48;\ 48 - 22 = 26.$

Отгадывание: число 26 четное; вычтя из него 4, получим 22.

b) $23;\ (23 - 1) : 2 = 11;\ \ 11 + 1 = 12;\ 4 \cdot 12 = 48;\ 48 - 23 = 25.$

Отгадывание: число 25 нечетное; вычтя из него 2, получим 23.

2. Избранное вами число умножьте на 3, к произведению прибавьте 1, сумму опять умножьте на 3 и, наконец, к полученному результату прибавьте первоначальное число. Скажите, сколько получилось, а я сразу же назову избранное вами число.

Чтобы угадать избранное число, достаточно отбросить крайнюю цифру 3 от названного числа; оставшееся число и будет искомым.

Пример:

$$13;\ 3 \cdot 13 = 39;\ \ 39 + 1 = 40;\ \ 3 \cdot 40 = 120;\ 120 + 13 = 133.$$

Отбросив 3, получим 13.

3. Какое-нибудь задуманное число возведите в квадрат, потом число, на 1 больше задуманного, тоже возведите в квадрат, сообщите мне только разность этих двух квадратов, если хотите, чтобы я знал, какое число вы избрали.

Отгадывание основано на известном свойстве разности квадратов двух последовательных натуральных чисел; эта разность равна удвоенному меньшему числу плюс 1. Итак, узнав, каков результат действий, следует взять его меньшую половину — она будет искомым числом.

Пример:

$$17;\ 17^2 = 289;\ 18^2 = 324;\ 324 - 289 = 35.$$

Меньшей половиной числа 35 является 17.

4. Задумайте какое-нибудь число, лучше — хотя и не обязательно — однозначное, умножьте на 5, прибавьте 2, умножьте на 4, прибавьте 3, умножьте на 5, прибавьте 7. Едва вы успеете назвать результат, полученный вами, как я скажу вам, с какого числа вы начали.

Отгадывание заключается в отбрасывании двух последних цифр полученного результата; например:

$$7;\ 35;\ 37;\ 148;\ 151;\ 755;\ 762.$$

От числа 762 следует отбросить две последние цифры, останется 7.

5. Не очень большое число, во всяком случае меньшее чем 996, умножьте на 37, прибавьте 111, умножьте на 27, а результат округлите до тысячи. По полученному вами результату я отгадаю, какое число вы задумали.

Чтобы угадать, нужно вычесть 3 из числа тысяч.

Пример:

$$14;\ 518;\ 629;\ 16983;\ 17000.$$

Вычтя 3 из числа тысяч, то есть из 17, получаем 14.

4. Отгадывание нескольких чисел

1. Задумайте три числа — для упрощения небольшие. Умножьте первое число на 2, второе — на 3, третье — на 5. Сложите два последних произведения, вычтите первое и скажите мне, сколько получилось. Сложите произведения третье и первое, вычтите второе и снова скажите мне результат. И, наконец, сложите два первых произведения и вычтите третье. Если я буду знать и эту последнюю разность, тогда смогу назвать три задуманных вами числа.

Пусть x, y, z обозначают три избранных числа, a, b, c — множители, названные угадывающим (так в нашем случае: $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$).

Тогда:

$$\begin{cases} by + cz - ax = \alpha \\ cz + ax - by = \beta \\ ax + by - cz = \gamma \end{cases}$$

Поочередно складывая по два уравнения, получим:

$$2ax = \beta + \gamma, \quad \text{то есть} \quad x = \frac{\beta + \gamma}{2a}$$

$$2by = \gamma + \alpha, \quad \text{то есть} \quad y = \frac{\gamma + \alpha}{2b}$$

$$2cz = \alpha + \beta, \quad \text{то есть} \quad z = \frac{\alpha + \beta}{2c}$$

Например, $x = 4$, $y = 7$, $z = 8$:

$$3 \cdot 7 + 5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 53; \quad x = \frac{27 - 11}{2 \cdot 2} = 4;$$

$$5 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 27; \quad y = \frac{53 - 11}{2 \cdot 3} = 7;$$

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = -11; \quad z = \frac{53 + 27}{2 \cdot 5} = 8.$$

2. Задумайте одно трехзначное число и три однозначных числа. Умножьте первое число на 2, прибавьте 1, сумму умножьте на 5 и прибавьте второе число. Сумму опять удвойте, увеличьте на 1, умножьте на 5 и прибавьте третье число. С полученным результатом проделайте еще раз те же самые действия и прибавьте четвертое число. Когда кончите, сообщите мне конечный результат, а я немедленно назову вам все четыре числа.

Отгадывание необычно легкое: от названного результата нужно отнять 555 и прочесть сначала трехзначное число, а потом три однозначных. Вот пример:

$$234,\ 7,\ 8,\ 3;\ 469;\ 2352;\ 4705;\ 23\,533;\ 47\,067;\ 235\,338;$$
$$235\,338 - 555 = 234\,783.$$

Для тех, кто желал бы эту интересную задачу обобщить и вместо четырех чисел взять больше или вместо первого трехзначного числа взять число многозначное, приводим здесь подробно ход действий в вышеприведенном примере:

$$\begin{array}{l}
234 \\
2 \cdot 234 + 1 \\
10 \cdot 234 + 5 + 7 \\
20 \cdot 234 + 10 + 2 \cdot 7 + 1 \\
100 \cdot 234 + 50 + 10 \cdot 7 + 5 + 8 \\
200 \cdot 234 + 100 + 20 \cdot 7 + 10 + 2 \cdot 8 + 1 \\
1000 \cdot 234 + 500 + 100 \cdot 7 + 50 + 10 \cdot 8 + 5 + 3 = 235338
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
235338 \\
555 \\
\hline
234783
\end{array}$$

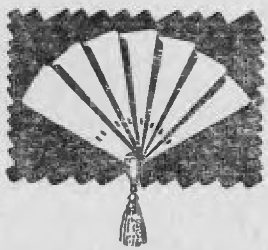
5. Волшебные таблицы

Этот способ отгадывания, несомненно, менее привлекателен по сравнению с предыдущими, но интересный и очень легкий, а при умении и ловкости можно добиться неплохого эффекта.

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

Рис. 135

Приведенные рядом таблицы цифр (рис. 135) можно выписать на картонных карточках или на веере. Тогда будем говорить о волшебном веере. Отгадывание особенно эффектно, если, запомнив последовательность столбцов,



отгадывающий даст ответ без промедления, не глядя на таблицу. Ему должно быть достаточно, если кто-нибудь назовет, в каких столбцах, считая слева, находится избранное им число.

Секрет заключается в том, что отгадывающий должен мгновенно сложить верхние основные числа названных столбцов.

Если кто-нибудь, например, скажет, что замеченное им число находится в первом и последнем столбце, отгадывающий должен немедленно назвать 17; если в четырех первых — 30, в трех центральных — 14, и т. д.

Способ составления таких таблиц читатель легко угадает сам, разбирая приведенные здесь таблицы, и, если захочет, может увеличить число столбцов до 6, взяв в качестве основной системы чисел следующую расстановку чисел — 32, 16, 8, 4, 2, 1, причем наибольшим числом, записанным в нижнем ряду всех столбцов, будет

14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25	26	27	28
29	30	31	32	33
34	35	36	37	38
39	40			

Рис. 136 (таблица I)

5	6	7	8	9
10	11	12	13	32
33	34	35	36	37
38	39	40		
	XIV	XV	XVI	XVII
XVIII	XIX	XX	XXI	XXII

Рис. 137 (таблица II)

$63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$; при семи столбцах к системе основных чисел присоединится 64, при восьми — 128, и т. д.

Несколько более сложными являются следующие таблицы (рис. 136, 137, 138, 139) с двойной нумерацией: арабской и римской. Их можно расположить в трех столбцах вместо пяти.

Основные числа, которыми оперирует угадывающий, не значатся, да и не должны быть на таблицах. Впрочем, это совершенно излишне, ибо запомнить их очень легко:

Для	таблицы	I... 27
»	»	II ... 9
»	»	III ... 3
»	»	IV ... 1

Следует предложить отыскать задуманное число, не больше 40, сначала в таблице I, потом по очереди в таблицах II, III и IV, указывая, написано ли это число арабскими цифрами или же римскими. Указание порядка и вида цифр необходимо, так как если задуманное число написано арабскими цифрами, то соответствующее основное число таблицы прибавляется, а если же римскими, то основное число вычитается.

2	3	4	11	12
13	20	21	22	29
30	31	38	39	40
			V	VI
VII	XIV	XV	XVI	XXII
XXIV	XXV	XXXII	XXXIII	XXXIV

Рис. 138 (таблица III)

1	4	7	10	13
16	19	22	25	27
31	34	37	40	
		II		VIII
XI	XIV	XVI	XX	XXIII
XXVI	XXIX	XXXII	XXXV	XXXVIII

Рис. 139 (таблица IV)

Например, предположим, кто-то заявляет, что задуманное им число находится в таблице I и записано арабскими цифрами, а в таблице IV записано римскими цифрами. Тогда угадывающий моментально вычитает 27—1 и отвечает: 26.

Если же число находится в таблице I и записано арабскими цифрами, в таблицах II и III—римскими, а в таблице IV снова арабскими, то мы имеем $27-9-3+1=16$.

Другой способ угадывания можно применить, используя 20 подвижных числовых столбцов. С этой целью на картоне выписываются две таблицы с числами от 1 до 100. Затем их рассекают на 20 горизонтальных столбцов.

Отгадывающий предлагает избрать какое-либо число из 20 столбцов, которые он вручает, и оставить только те,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 140

91	81	71	61	51	41	31	21	11	1
92	82	72	62	52	42	32	22	12	2
93	83	73	63	53	43	33	23	13	3
94	84	74	64	54	44	34	24	14	4
95	85	75	65	55	45	35	25	15	5
96	86	76	66	56	46	36	26	16	6
97	87	77	67	57	47	37	27	17	7
98	88	78	68	58	48	38	28	18	8
99	89	79	69	59	49	39	29	19	9
100	90	80	70	60	50	40	30	20	10

Рис. 141

в которых находится избранное число. Остальные столбцы (18) забирает назад. Затем он должен быстро сообразить, которых столбцов не хватает, и немедленно назвать избранное число, взяв десятки этого числа из возвращенного ему столбца таблицы II, а единицы из оставленного у партнера столбца таблицы I (рис. 140 и 141).

Например, кто-то избрал число 37. Это число, как и всякое другое, находится в двух столбцах, а именно в том, который имеет в своей верхней клеточке число 31, и в том, у которого наверху число 7. Как только отгадывающий рассмотрит возвращенные ему 18 столбцов и заметит отсутствие столбцов с начальными числами 31 и 7, он может моментально сказать, что избранным числом является 37.

6. Угадывание четности или нечетности числа предметов

Возьмите в одну руку какое-либо четное число спичек (орехов, монет), а в другую — нечетное число их. Умножьте число спичек в правой руке на произвольное нечетное число, а число спичек в левой руке — на произвольное четное число. Сложите полученные произведения и назовите результат, а я сразу же скажу, в которой руке четное, а в которой нечетное число спичек.

Если названо четное число, то в правой руке будет четное число, а в левой нечетное; если названо нечетное число, то будет наоборот. Вот пример:

А. Правая рука 4, левая 3; $7 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 46$;
Б. Правая рука 5, левая 2; $7 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 47$.

Еще более эффектна другая разновидность этого угадывания. Предлагается взять в одну руку 4, а в другую 7 спичек, затем содержимое правой руки удвоить, а левой руки утроить и, наконец, из суммы полученных произведений вычесть 27. Если вычитание окажется невозможным, то четное число находится в левой руке; если же оно возможно, то наоборот — в правой.

Чтобы в случае протеста, что 27 нельзя отнять от полученной суммы, «замести следы», можно, не давая понять, что уже все угадано, уменьшить это число, например, на 10, сказав: если не можете вычесть 27, то вычтите 17, и затем предложить еще несколько других добавочных действий.

Еще легче можно «замести следы» во втором случае, где полученная сумма больше 27: можно продолжить различные действия, чтобы потом без всяких дальнейших вопросов указать, где находится четное число, а где нечетное. Это обычно приводит всех в изумление.

При повторении этого фокуса можно вместо числа 27 с подобным же успехом предложить вычесть 28, так как это вычитание основано на учете двух возможностей:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 26; \text{ или } 3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 29.$$

Итак, оба числа, как 27, так и 28, находятся между этими двумя единственно возможными результатами.

7. Отгадывание даты рождения

Число, означающее день вашего рождения, умножьте на 20 и прибавьте 77. Сумму умножьте на 5 и прибавьте число, означающее месяц, в который вы появились на свет. Умножьте эту сумму на 20 и опять прибавьте 77. Результат умножьте на 5, прибавьте две последние цифры года, в котором вы родились. Назовите результат, а я легко прочту по полученному вами большому и странному числу точную дату вашего рождения.

Отгадывание заключается в вычитании числа 38 885 из полученного результата: первые две цифры разности укажут день рождения, другие две — месяц, последние две — год (предполагая, что относительно столетия, в которое произошло это важное событие, не может быть никаких сомнений).

Например, кто-то родился 22 декабря 1881 года. Последовательно выполняя указанные действия, получим следующие промежуточные результаты:

$$\begin{aligned} 20 \cdot 22 + 77 &= 517; \\ 5 \cdot 517 + 12 &= 2597; \\ 20 \cdot 2597 + 77 &= 52017; \\ 5 \cdot 52017 + 81 &= 260166. \end{aligned}$$

Из результата 260 166 отгадывающий вычитает 38 885, получив 221 281, объявляет дату рождения: $22 \cdot 12 \cdot 81$.

Приведенное здесь число 77, которое дважды прибавляется, можно заменить любым другим числом k, произвольно избранным отгадывающим, с тем, однако, отличием, что тогда вместо 38 885, то есть $505 \cdot 77$, вычесть нужно будет $505k$.

Отгадывание основано на тех же самых принципах, что и одновременное отгадывание нескольких чисел, которое подробно разъяснялось выше.

VI. ИЗ ТАЙНИКОВ ШАХМАТНОЙ ДОСКИ И ДОМИНО

Общие замечания

Из числа разнообразных игр, которым посвящена VI глава настоящей книги, мы указали в заглавии только две, хотя о настоящей игре в шахматы и домино не будет даже и речи. Однако из самих предметов, служащих для обеих игр, можно составить так много математических комбинаций, что они действительно заслуживают особого рассмотрения.

Что касается домино, то эта игра в последние времена очень мало распространена среди молодежи или же недооценивается ею. Поэтому ее правилам и разновидностям отводится немного больше места, не исключая, конечно, головоломок и фокусов, которые можно составить при помощи костей домино.

Шахматная доска

1. Вознаграждение изобретателя

Предание повествует, что властитель Индии, восхищенный новой игрой, обещал наградить изобретателя шахмат «всем», чего он только пожелает. Изобретатель потребовал на первый взгляд очень скромную плату: он хотел получить столько пшеничных зерен, сколько их выпадет, если на протяжении всех 64 клеток шахматной доски удваивать количество зерен на каждой последующей клетке. Следовательно, он хотел получить столько зерен, сколько получится в результате суммирования геометрической прогрессии, первым членом которой является 1, частным 2, а число членов равно 64.

Властелин Индии, богатейший человек на свете, не был в состоянии выдать такое вознаграждение. Можно сказать большее: даже этот восточный раджа с необузданным воображением, наверное, не мог представить себе такого количества зерна!

Число зерен равно сумме ряда, состоящего из степеней числа 2 со всеми последовательными показателями от 0 до 63, то есть 18 446 744 073 709 551 615 зерен, или, в кубических метрах, 922 337 203 685 $м^3$, считая, что на 1 $см^3$ приходится 20 зерен, то есть 20 миллионов зерен на 1 $м^3$.

Подсчитано, что, для того чтобы получить такое количество зерна, следовало бы восемь раз засеять всю землю и восемь раз собрать урожай. Иными словами, количество это равнялось бы сбору зерна с планеты поверхностью в 8 раз большей, чем наша Земля.

Хороший урок дал своему повелителю изобретатель шахмат, доказав ему, что далеко не «всем», чего пожелает, он может располагать.

2. Две задачи о нескольких ферзях

А. Ферзь в шахматной игре, как известно, имеет право передвигаться и бить по всем клеткам, во всех направлениях: вдоль рядов клеток и по диагоналям шахматной доски. Клетки, по которым ферзь может передвигаться и бить, называются полями, находящимися под угрозой.

Итак, представим себе, что вместо — как обычно — двух ферзей, их имеется четыре (для этого обычные пешки

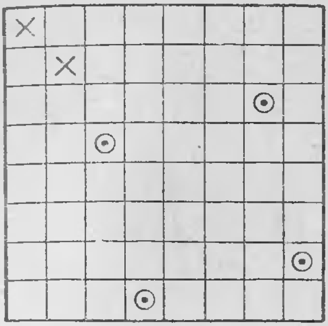


Рис. 142

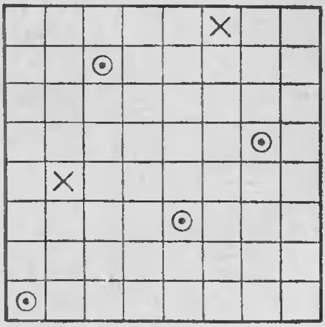


Рис. 143

можно наделить привилегиями ферзей). Нужно найти для них такое расположение на шахматной доске, чтобы возможно большее число полей находилось под угрозой.

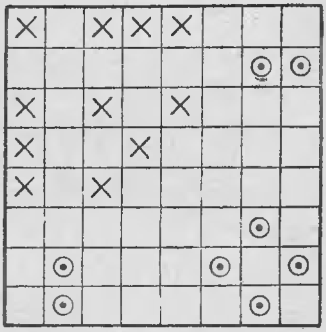


Рис. 144

Существует несколько расположений, при которых из 64 полей свободны только 2, то есть они не находятся под угрозой. Здесь мы приведем две такие комбинации, а остальные читатели пусть отыщут самостоятельно.

На приведенных здесь таблицах кружочки обозначают ферзей, а крестики — поля, которые не находятся под угрозой (рис. 142 и 143). Предлагаем также отыскать подобным же образом максимальное число полей, находящихся под угрозой, для четырех ладей, слонов или коней, учитывая при этом правила передвижения этих фигур.

Б. 8 ферзей требуется расставить так, чтобы осталось как можно больше полей, которые не находятся под шахом. Вот одно из решений, при котором остается 11 свободных полей (рис. 144). Можно предложить еще и другие расстановки ферзей, но до сих пор еще не удалось найти такой, при которой число свободных клеток было бы бо́льшим; однако пока никто математически не доказал, что это невозможно. Поэтому в настоящее время 11 свободных клеток считается пределом. Несомненно, стоит испробовать, не удастся ли побить этот мировой рекорд.

3. Ходом коня

В конце прошлого и в начале нынешнего века очень популярными были шахматные задачи с вариантом коня. Они были основаны на том, что в каждом квадрате, разделенном на меньшее или большее число клеток, были вписаны отдельные слоги, очередность которых следовало отыскать, используя ходы шахматного коня. В решении получали стишок или афоризм.

Однако не об этих задачах будет здесь идти речь, а о тех правилах или способах, используя которые можно шахматным конем обойти все без исключения 64 поля шахматной доски, побывав в каждом из них только один раз.

Для тех, кто не знаком с правилами шахматной игры, мы приводим два чертежа, объясняющие, в чем заключается ход шахматного коня. Наглядный метод объяснит все значительно скорее, чем длинное описание. Итак, на рисунке 145 из поля, обозначенного кружочком, можно ходами коня попасть в каждое поле, обозначенное звездочками.

На рисунке 146, начиная с поля, обозначенного буквой *а*, можно ходами коня в алфавитной очередности обойти

8 полей, обозначенных буквами, и из поля h вернуться на поле a.

Вопросом ходов коня по шахматной доске занималось очень много математиков; самыми фундаментальными являются исследования знаменитого математика Эйлера. Его метод считается самым общим, хотя и не самым легким, мы его приводим первым.

Метод Эйлера (конец XVIII века). Ходы коня начинаются с любой клетки, и конь обходит без особого выбора наибольшее возможное число клеток, обозначая их последовательными числами. Когда все возможные ходы будут

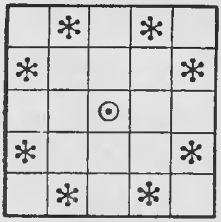


Рис. 145

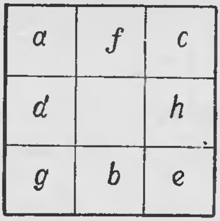


Рис. 146

использованы, то есть если из какого-нибудь поля конь уже не сможет идти дальше, то это поле называют последним и приступают к перестановкам, цель и способ которых лучше всего объяснят примеры.

Предположим, что конь успел обойти 63 поля, однако не может добраться до последнего поля, обозначенного на рисунке 147 кружком. Тогда отыскиваются клетки, через которые самой кратчайшей дорогой конь мог бы из поля 63 попасть в поле, еще не обозначенное номером. Такими полями являются поля 16 и 15 (существуют также и другие пути для перехода коня из поля 63 на поле ⊙, например 16 и 47, 14 и 15, 30 и 29 и т. п.), однако выбираем для примера первую дорогу, а другие оставляем читателю для самостоятельного изучения.

В этом случае ставим в поле, обозначенном кружочком ⊙, число 64, переносим 63 на место 15, потом переносим 62 на место 16, затем 61 на место 17, 60 на место 18 и так далее, поочередно, как указано на рисунке 148.

7	54	25	42	5	56	27	44
24	41	6	55	26	43	4	57
53	8	23	20	33	12	45	28
40	19	32	13	30	21	58	3
9	52	63	22	11	34	29	46
18	39	10	31	14	47	2	59
51	62	37	16	49	60	35	⊙
38	17	50	61	36	15	48	1

Рис. 147

7	24	53	36	5	22	51	34
54	37	6	23	52	35	4	21
25	8	55	58	45	12	33	50
38	59	46	13	48	57	20	3
9	26	15	56	11	44	49	32
60	39	10	47	14	31	2	19
27	16	41	62	29	18	43	64
40	61	28	17	42	63	30	1

Рис. 148

⊙	54	41	50	43	52	⊙	48
⊙	⊙	38	53	⊙	49	44	15
37	40	1	42	51	16	47	⊙
⊙	21	36	39	12	45	14	29
35	2	33	22	17	28	11	46
20	23	18	⊙	10	13	30	7
3	34	25	32	5	8	27	⊙
24	19	4	9	26	31	6	⊙

Рис. 149

Когда мы, наконец, дойдем до поля, которое сначала занимал номер 53, то теперь на нем окажется число 15; таким образом, это поле будет соединено ходом коня с полем 14. Поля же от 1 до 14 не подлежат никаким изменениям.

Предположим теперь, что после первых ходов коня осталось свободным не одно поле, а 10, как это указано на рисунке 149, где поля, по которым не прошел конь, обозначены кружками.

Конь «увяз», как видим, в поле 54. В этом случае переставляем 1 на вторую сверху клетку первого слева столбца, на место 1 станет 2 и так далее, наконец на месте

54 окажется 55. Таким образом, число пустых полей уменьшилось на единицу. Результат всех перестановок показан на рисунке 150.

В этом новом квадрате поле 39 соединено ходом коня с верхним левым полем. Ходом коня соединены также поля 38 и 55. Тогда мы ставим в левом верхнем пустом углу число 56, а на место 39—55; на место 40 станет 54, на место 41 — 53 и так далее, вплоть до поля 38, которое не подвергнется изменениям; числа 37, 36, ... тоже останутся

⊙	55	42	51	44	53	⊙	49
1	⊙	39	54	⊙	59	45	16
38	41	2	43	52	17	48	⊙
⊙	22	37	40	13	46	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	⊙	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	⊙
25	20	5	10	27	32	7	⊙

Рис. 150

56	39	52	43	50	41	⊙	45
1	⊙	55	40	⊙	44	49	16
38	53	2	51	42	17	46	⊙
⊙	22	37	54	13	48	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	⊙	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	⊙
25	20	5	10	27	32	7	⊙

Рис. 151

на своих прежних местах. Дальнейшие перестановки проделать уже нетрудно, они все показаны на рисунках 151—159.

Таким образом, наша задача решена: вся шахматная доска покрыта последовательными ходами коня. Но обычно на этом не останавливаются, а стремятся усовершенствовать решения таким образом, чтобы обход конем шахматной доски был замкнутым, то есть чтобы из поля 64 можно было попасть в поле 1; тогда каждое поле можно принять за первое, с которого начинаются ходы коня.

Чтобы этого добиться, мы отыскиваем два поля с последовательными числами, то есть такие, которые соединены

⊙	39	52	43	50	41	56	45
1	⊙	⊙	40	55	44	49	16
38	53	2	51	42	17	46	57
⊙	22	37	51	13	48	15	30
36	3	34	23	18	29	12	47
21	24	19	⊙	11	14	31	8
4	35	26	33	6	9	28	⊙
25	20	5	10	27	32	7	⊙

Рис. 152

⊙	31	18	27	20	29	14	25
1	⊙	⊙	30	15	26	21	54
32	17	2	19	28	53	24	13
⊙	48	33	16	57	22	55	40
34	3	36	47	52	41	12	23
49	46	51	58	11	56	39	8
4	35	44	37	6	9	42	⊙
45	50	5	10	43	38	7	⊙

Рис. 153

59	28	41	32	39	30	55	34
42	⊙	60	29	56	33	38	5
27	58	43	40	31	6	35	54
⊙	11	26	57	2	37	4	19
25	44	23	12	7	18	53	36
10	13	8	1	52	3	20	49
45	24	15	22	47	50	17	⊙
14	9	46	51	16	21	48	⊙

Рис. 154

2	33	20	29	22	31	6	27
19	62	1	32	5	28	23	42
34	3	18	21	30	43	26	7
61	48	35	4	39	24	41	56
36	17	60	49	44	55	8	25
47	50	45	38	9	40	57	12
16	37	52	59	14	11	54	⊙
51	46	15	10	53	58	13	⊙

Рис. 155

2	33	20	29	22	31	6	27
19	36	1	32	5	28	23	60
34	3	18	21	30	61	26	7
37	50	35	4	57	24	49	42
54	17	38	49	62	43	8	25
51	48	53	56	9	58	41	12
16	55	46	39	14	11	44	⊙
47	52	15	10	45	40	13	⊙

Рис. 156

2	33	20	29	22	31	6	27
19	36	1	32	5	28	23	42
34	3	18	21	30	41	26	7
37	52	35	4	40	24	43	60
48	17	38	53	40	59	8	25
51	54	49	46	9	44	61	12
16	47	56	39	14	11	58	63
55	50	15	10	57	62	13	⊙

Рис. 157

между собой ходами коня, причем одно из них соединено ходом коня с полем 1, а другое — с полем 64. Такими на рисунке 159 являются поля 48 и 47. Затем переставляем

2	29	16	25	18	27	62	23
15	32	1	28	63	24	19	38
30	3	14	17	26	37	22	61
33	52	31	4	59	20	39	44
56	13	34	51	36	43	60	21
53	50	55	58	5	40	43	8
12	57	48	35	10	7	46	41
49	54	11	6	47	42	9	⊙

Рис. 158

2	63	30	49	56	47	28	51
31	60	1	64	29	50	55	46
62	3	32	57	48	45	52	27
59	18	61	4	25	54	39	10
22	33	58	17	44	11	26	53
19	16	21	24	5	40	9	38
34	23	14	43	36	7	12	21
15	20	35	6	13	42	37	7

Рис. 159

19	2	47	6	9	64	45	14
48	5	18	1	46	15	10	63
3	20	49	8	17	62	13	44
6	35	4	21	42	11	56	27
39	50	7	34	61	28	43	12
36	33	38	41	22	57	26	55
51	40	31	60	53	24	29	58
32	37	52	23	30	59	54	25

Рис. 160

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	A	B	C	D	d	c
d	c	C	D	A	B	b	a
a	b	B	A	D	C	c	d
c	d	D	C	B	A	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Рис. 161

последнее поле 64 на место 47, 63 попадает на место 46 и так далее, пока не дойдет до 1, которая окажется в поле с номером 64. В конечном результате шахматная доска приобретает следующий вид (рис. 160).

Рамочный метод Муна (1843). Шахматная доска делится на две части: внутреннюю, состоящую из 16 полей, и внешнюю в форме рамы из 48 полей (рис. 161). В поля внутреннего квадрата вписываем заглавные буквы A, B, C, D таким образом, чтобы каждая из этих букв, повторенная четыре раза, образовала квадрат или ромб ходов коня, то есть такой, по всем сторонам которого может ходить конь; те же самые буквы, только строчные, вписываем в рамочных клетках так, чтобы ходы коня по каждой из них образовывали замкнутые многоугольники. Как легко убедиться, порядок расстановки букв такой же, как и в центральном квадрате.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	d	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Рис. 162

34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42

Рис. 163

Конь начинает ходы от какого-нибудь рамочного поля; когда он пройдет по избранной букве вокруг рамы и в 12 ходов будет исчерпана, например, буква a, тогда он переходит во внутренний квадрат, однако не на букву A, а на какую-нибудь другую, например B, C или D. Пройдя все поля, обозначенные этой буквой, конь снова переходит за раму — на букву, по которой он еще не ходил, и вновь обегает вокруг рамы, пока не будет исчерпана до конца эта буква, и так далее, пока не доберется до поля 64.

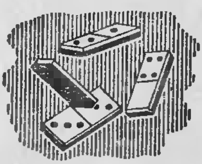
Метод Роже — деление на четверти (первая половина XIX в.). Это самый легкий, но малоизвестный способ ходов коня. Шахматная доска делится крестом через центр на четыре равные части. В каждой из этих 16-клеточных квадратов расставляют буквы a, b, c, d точно таким же образом, как мы это делали во внутреннем квадрате по методу Муна. Конь начинает ходить с любой буквы. Он проходит поочередно по всем четырем полям, обозначенным этой буквой в данном квадрате, затем переходит на ту же самую букву соседнего квадрата, и т. д.

Исчерпав все 16 полей, обозначенных данной буквой, конь переходит к следующей букве, чтобы снова, проходя по ее полям, зигзагом обежать шахматную доску; так продолжается до тех пор, пока конь не обойдет все 64 поля квадрата (рис. 162, 163).

4. Другие задачи на обход полей шахматной доски

Кроме самых популярных и наиболее разработанных задач на обход полей шахматной доски, какими являются задачи для шахматного коня, существуют еще и другие, менее известные, решения которых, однако, являются очень полезным и интересным развлечением.

Такой задачей будет, например, не прерываемый нигде обег ферзем всех или только каких-то определенных полей шахматной доски при условии, что он должен начать и кончить на двух точно определенных полях. Ту же самую задачу можно поставить и для ладьи, а в некоторой степени и для слона. Возможности для изобретательности читателя в этой области очень широки...



Домино

Магическое домино. Из части костей домино или же из всех костей домино можно составить очень интересные магические квадраты.

А. С квадратами, состоящими из 9 клеток, связаны задачи следующего содержания.

К семи костям с пустыми квадратами нужно подобрать еще две такие кости домино, чтобы можно было составить волшебный квадрат, в котором сумма всех очков костей, расположенных в столбцах, рядах и вдоль диагоналей, выражалась одинаковым числом.

Приводим решение: к костям с «пустыми» квадратами подобраны следующие кости 1—6 и 2—6; магическая сумма равна 12 (рис. 164). Какие кости домино нужно подобрать и как составить волшебный квадрат, если вместо 7 костей с «пустыми» квадратами мы возьмем 7 единиц и 7 двоек?

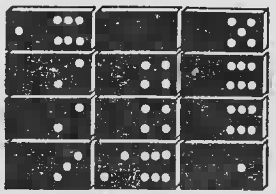


Рис. 164

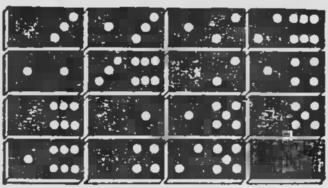


Рис. 165

Какие будут в каждом из этих квадратов магические суммы? Можно ли составить такие магические квадраты из 7 пятерок или 7 шестерок?

Б. С квадратами, состоящими из 16 клеток, связаны более сложные задачи; отобрав все кости с «пустыми» квадратами и с единицами, к ним нужно прибавить еще такие три кости, чтобы можно было составить магический квадрат.

Приводим решение: магическая сумма равна 18, а подобраны были следующие кости домино: 2—5, 2—6, 3—6 (рис. 165).

Попробуйте в этом волшебном квадрате переставить первый столбец или первый ряд на последнее место и вы убедитесь в удивительном свойстве этого квадрата, а именно в том, что он не перестанет быть магическим.

И снова появляется искушение составить такие же квадраты из костей домино с бо́льшим числом очков. Попробуйте!

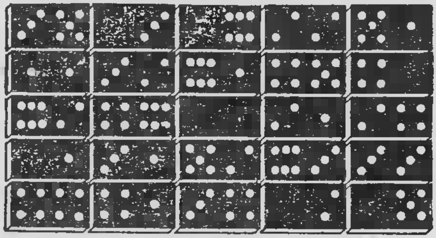


Рис. 166

В. Квадраты, состоящие из 25 клеток. Ниже приводим магический квадрат, составленный из 25 костей домино, с которым связаны следующие вопросы: какие три кости нужно было отбросить? Нельзя ли отбросить другие? При каких перестановках квадрат (рис. 166) остается магическим?

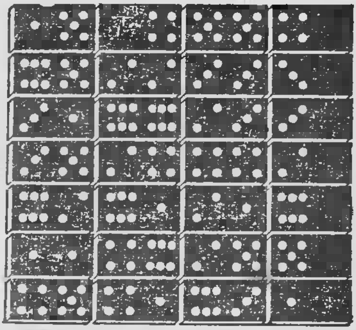


Рис. 167

Г. Магический квадрат, составленный из всех костей домино. Это, несомненно, самый интересный и самый характерный магический квадрат из костей домино. Он отличается самым принципиальным образом от всех предыдущих, так как в нем суммируются очки не целых костей, а очки квадратов, которые (если не учитывать «пустых» квадратов, образующих последний столбец) составляют магический квадрат из 49 клеток (рис. 167).

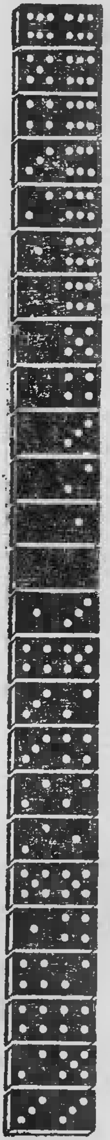


Рис. 168

Угадывания. А. Можно ли угадать, какими квадратами окончится ряд, начатый данной костью домино? Конечно, это можно угадать и предсказать при помощи маленького... мошенничества.

Все кости домино переворачиваются «лицом» вниз, их очень долго и осмотрительно перемешивают, тайком припрятав в руке одну из костей — все равно какую, лишь бы только не «дубль».

Предположим, что это кость 3—5.

Затем кому-либо из присутствующих предлагается, чтобы он наугад открыл кость и начал к обоим ее концам приставлять кости по обычным правилам игры в домино.

В это время, чтобы вызвать больший эффект, можно проводить очень запутанные вычисления; затем, как бы в результате этих вычислений, объявить, что ряд, начатый вынутой наугад костью, после того как будут выставлены кости домино, будет иметь на одном конце 3, а на другом 5 очков, — хотя это было известно угадывающему с самого начала, с того момента, как он спрятал кость 3—5.

Приведенное выше угадывание основано на том свойстве домино (состоящего из 28 костей), что по обычным правилам игры из всех костей домино можно составить замкнутый круг. Если же откуда-нибудь удалить одну из костей домино, например 3—5, то, конечно, в этом месте образуется пробел, на концах которого будут находиться квадраты костей с таким же числом очков, какое было на удаленной кости домино.

В. Как угадать, сколько костей домино переместили.

Составляется следующий ряд из 25 костей (рис. 168).

В этом ряду, как легко заметить, в самом центре лежит кость 0—0. В верхнем конце ряда кости домино расположены в порядке убывания числа очков — от 12 до 1, в нижнем же конце 12 костей расположены совершенно произвольно. Весь этот ряд переворачиваем «лицом» вниз и предлагаем кому-либо из присутствующих в отсутствие угадывающего переместить с нижнего конца ряда вверх несколько костей. Угадывающий, вернувшись, открывает центральную кость, число очков которой указывает, сколько костей домино было перемещено.

Можно условиться, чтобы число перемещенных костей не превышало 5 или 6; тогда угадывание можно будет легко повторить. Но во второй раз нужно будет открыть не центральную кость, а ту, которая расположена на столько мест ниже ее, сколько костей было перемещено в первый раз.

Приемы этого угадывания настолько просты, что все объяснения были бы излишни.

VII. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ, РАЗВЛЕЧЕНИЯ, ГОЛОВОЛОМКИ, ФОКУСЫ, ШУТКИ

1. Лабиринты

И снова одно из математических чудес, возникновение которого затеряно в легендарном сумраке истории. Карл Лепсиус, знаменитый египтолог, утверждает, что название «лабиринт» происходит от египетских слов: «lepi» — «святое учреждение» и «re-hint» — «устье канала». Другие же ученые считают, что это слово греческого происхождения, обозначающее «подземные ходы». Возникло ли это слово, понятие и даже сами сооружения на греческой земле или попало туда много веков назад из Египта, выяснить невозможно.

Из работ Лепсиуса известно, что в Египте над озером Моэрис до сих пор существуют развалины лабиринта, построенного в 2100 году до н. э., следовательно, самого древнего из существующих. О других двух древних лабиринтах вспоминает Плиний, а именно о Лемносском лабиринте на острове Лемнос и итальянском под Клюзией. Однако самым известным является легендарный Критский лабиринт, в котором, как повествует предание, пребывало многие годы сказочное чудовище Минотавр, пока, наконец, богатырь Тезей не забрался в лабиринт и не умертвил чудовище, а затем благополучно и хитроумно вернулся назад благодаря вошедшей в поговорку с тех времен «нитке Ариадны».

Рисунками лабиринта украшали в раннее средневековье одежды христианских монархов, а потом, особенно в XII столетии, стены и паркеты храмов. Это был символ запутанности земных дорог и людских блужданий.

В позднейшие века лабиринты утратили свой первичный мистично-религиозный характер и стали предметом украшения и развлечения в громадных княжеских парках, дворцах и т. п.

Все известные лабиринты можно разделить на кажущиеся и настоящие, ибо во многих случаях очень запутанный рисунок на самом деле представляет собой многократные изгибы одной дороги.

Если настоящий лабиринт мы определим как путаницу дорог, по которым очень трудно добраться до центра, а также выйти назад, то в кажущихся лабиринтах все наоборот: войдя в него и направляясь все время вперед, нельзя не дойти до центра, а повернув назад, нельзя не выйти из него.

Рис. 169

Таким кажущимся лабиринтом является приведенный здесь на рисунке 169 знаменитый лабиринт в кафедральном соборе в Шартре (расположенном на расстоянии нескольких десятков километров от Парижа), имеющий в диаметре 40 локтей, через узкие проходы которого пробирались верующие с покаянными псалмами.

Таким же кажущимся лабиринтом является приведенный на рисунке 170 итальянский лабиринт XVI столетия, а также датский лабиринт, относящийся к тому же самому времени, изображенный на рисунке 171.

Промежуточное место между кажущимися лабиринтами и настоящими занимают лабиринты, в которых можно

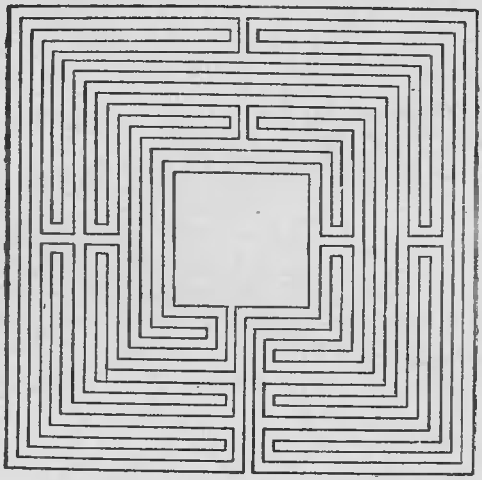


Рис. 170

передвигаться с полной уверенностью, если знаешь их секрет, если имеется хоть один маленький указатель — как бы ключ к этой загадке, кажущейся чрезвычайно запутанной.

Такого типа лабиринтом является садовый лабиринт в Кемтон Корт, неподалеку от Лондона, созданный из шпалер грабовых деревьев, ведущий к двум большим деревьям, под которыми некогда стояла скамейка (рис. 172). Этот лабиринт относится, как утверждают некоторые историки, еще ко времени Генриха VIII. Он занимал свыше 1200 *кв. м.* Его аллеи тянулись на половину английской мили, то есть на 800 *м.*

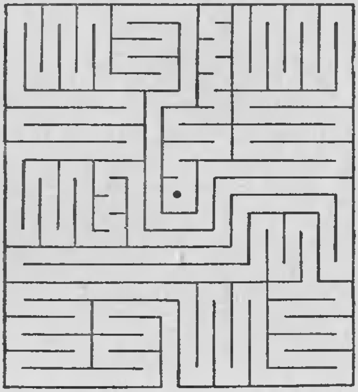


Рис. 171

Это, как видно по рисунку, лабиринт, в котором действительно можно заблудиться. Но, если известен его секрет, если знаешь, что, передвигаясь вперед, постоянно следует придерживаться или правой или левой стороны, его можно

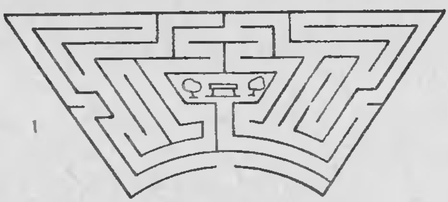


Рис. 172

обойти вокруг без всяких трудностей, минуя при этом, как видно на рисунке 173, только одну-единственную аллейку.

Лабиринты, показанные ниже, это уже настоящие лабиринты.

Рисунок 174 представляет эффектный, хотя и не слишком запутанный немецкий лабиринт.

Очень любопытный тип лабиринта приведен на рисунке 175.

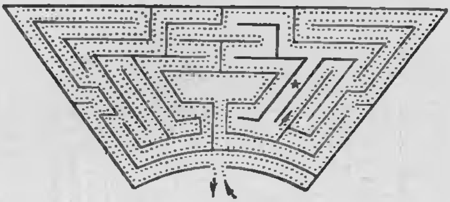


Рис. 173

Он был создан из грядок высотой около одного фута, вьющихся и переплетающихся на площади около 4000 *кв. м.* Существовал в Англии в графстве Дорсет до 1730 года.

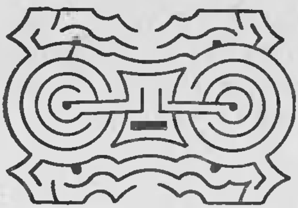


Рис. 174

Кто найдет путь к помещенному в центре рисунка сердечку?

В самом центре прекрасного парка (рис. 176) среди лабиринта аллей и живых изгородей затерялся маленький дворец. В этом уединенном месте английский король Генрих II, влюбленный в прекрасную Розамунду, ревниво прятал ее красоту от людских глаз.

Если бы мы жили в XII веке и захотели увидеть воспетую многими поэтами красоту Розамунды, мы должны были бы найти тропинку, которая вела к ее дворцу.

Успешнее всего решить эту задачу (как и две предыдущие) можно с конца: попробовать выбраться из западни этих дорог — из центра рисунка.

Этого превосходного способа нельзя применить к последнему из приведенных здесь лабиринтов, который устроил в своем саду английский математик Раус Болл (рис. 177).

Здесь вопрос заключается не в том, чтобы дойти до какого-то определенного места, а скорее в том, как

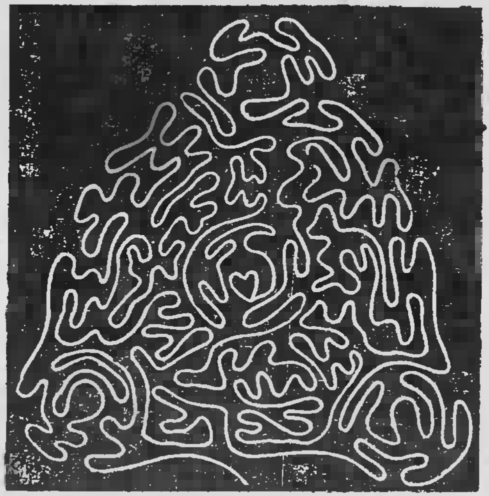


Рис. 175

можно проделать самую длинную прогулку с возможно меньшим числом аллей, которые приходится посещать дважды.

Хотя в обиходном понятии лабиринт обозначает путаницу дорог, из которых нельзя выбраться, однако после недолгих размышлений каждый должен признать, что не может быть лабиринта без выхода, если есть... вход.

Возможность разгадать каждый лабиринт, даже без «нити Ариадны», никого уже ныне не удивит, в то же время многим может показаться удивительным, что

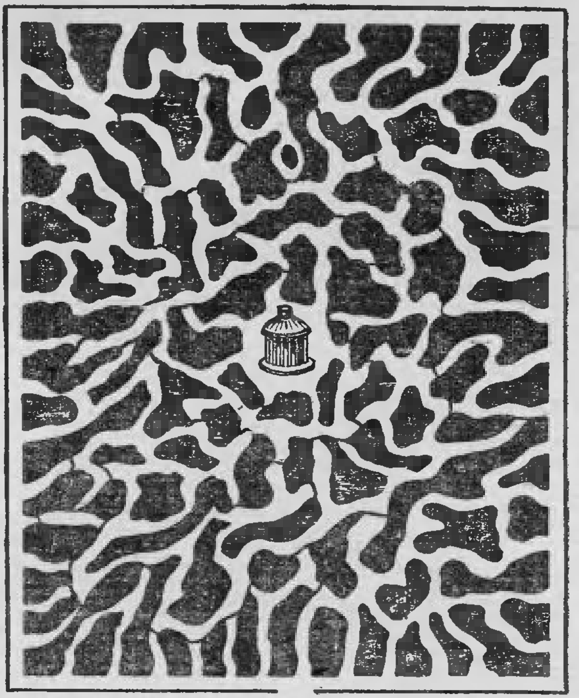


Рис. 176

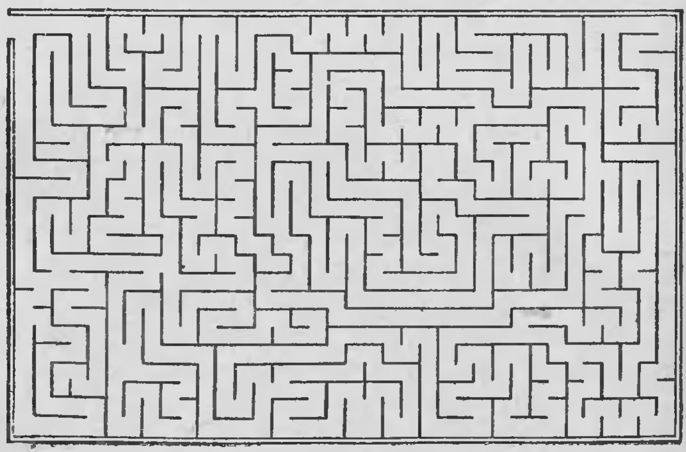


Рис. 177

известны не только правила подобных решений, но и что существует почти целая геометрическая теория этих решений.

2. Кенигсбергские мосты

В тесной связи с задачами на лабиринты находится целый ряд очень разнообразных задач, развлечений и игр, которые мы здесь поочередно рассмотрим, не слишком углубляясь в их математические теории, указывая только простейшие, но порой очень остроумные их решения или практические применения.

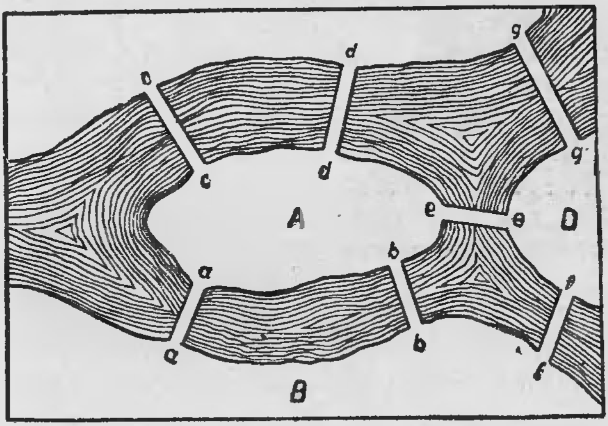


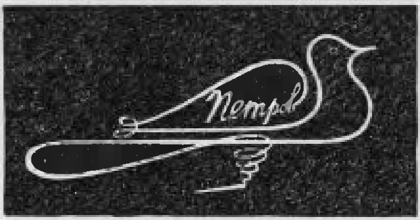
Рис. 178

Знаменитую задачу о мостах в Кенигсберге составил Л. П. Эйлер в 1759 году. Он поставил вопрос: можно ли поочередно обойти семь мостов, соединяющих районы города с островом на реке Прегель, проходя по каждому не более одного раза (рис. 178).

Пробы, которые мы советуем проделать, обнаружат, что это невозможно.

3. Одним росчерком

Здесь мы рассмотрим фигуры, которые можно начертить одним росчерком, то есть не отрывая карандаша или ручки от бумаги и не проводя более одного раза по одной и той же линии.



Вероятно, не один из читателей очень удивится, если узнает, что он не сможет начертить таким способом обыкновенный прямоугольник или квадрат с двумя диагоналями и в то же время легко сможет нарисовать, не отрывая

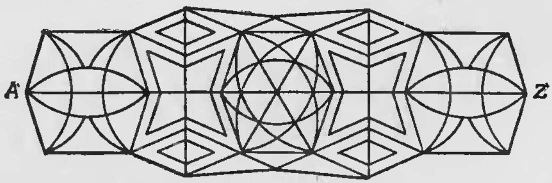


Рис. 179

карандаша от бумаги, такую сложную фигуру, как та, которую мы приводим на рисунке 179.

В чем тут дело? Как отличить такую фигуру от других, подобных ей фигур, которые нельзя начертить одним росчерком? Можно ли вообще сформулировать в этой области какие-нибудь основные правила? Конечно, можно, но это требует очень сложных математических рассуждений. Мы же здесь остановимся на рассмотрении только простых примеров и затем приведем уже готовые, совершенно точные правила. Пятиугольник $ABCDE$ (рис. 180) легко можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, причем различными способами, например $ABECBD$ $CADEA$. Чем принципиально отличается этот пятиугольник с пятью диагоналями, начерченный одним росчерком, от квадрата с двумя диагоналями, который нельзя начертить, не отрывая карандаша от бумаги? «Нечетным числом сторон», — скажете вы. Да, но в данном случае это не является принципиальной разницей, так как — в этом легко убедиться — квадрат с одной диагональю великолепно можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги. В то же время с пятиугольником, если мы начнем поочередно вычеркивать его диагонали, начнут происходить очень странные вещи. Если мы оставим четыре диагонали, его еще можно будет начертить одним росчерком, то же самое и при трех диагоналях; при двух же диагоналях пятиугольник уже нельзя будет начертить одним росчерком, это не помешает тому, что если мы вычеркнем еще одну диагональ, то его снова можно будет начертить одним обходом карандаша.

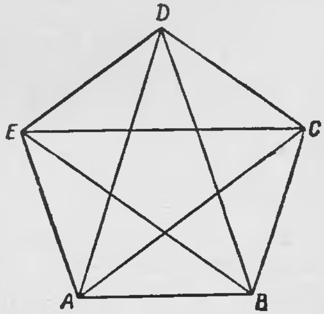


Рис. 180

Эти преобразования, несомненно, натолкнут внимательного читателя на правильное предположение, что возможность начертить фигуру одним росчерком зависит от узлов, в которых сходятся линии, точнее говоря, от того, являются ли эти узлы четными или же нечетными. При этом четным называется узел, если в нем сходится четное число линий, и нечетным, если число сходящихся в нем линий нечетное.

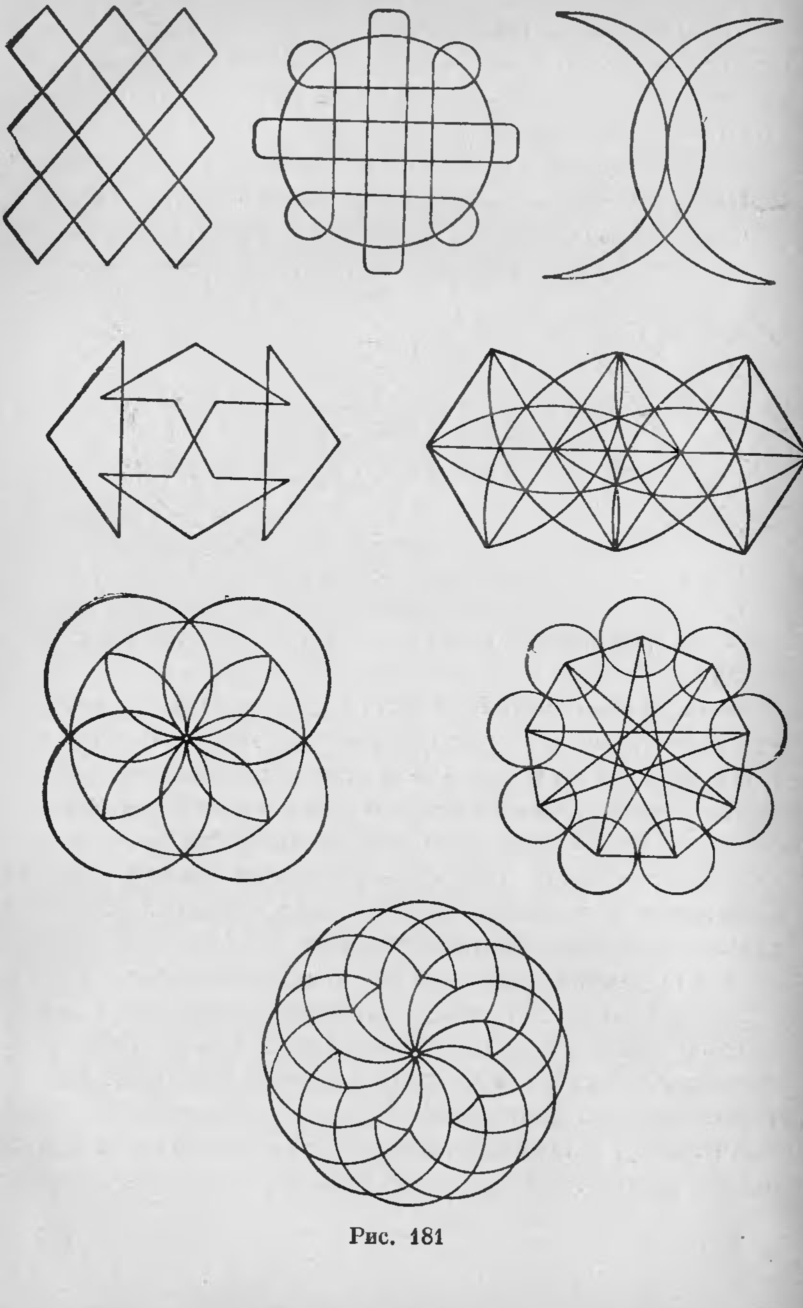


Рис. 181

А вот общее правило.

Фигуру можно начертить одним росчерком, если все ее узлы являются четными или если фигура содержит не более чем два нечетных узла.

Из вышеуказанного правила нелегко сделать какие-нибудь практические выводы, как именно следует вычерчивать подобные фигуры. Но одно указание должно быть приведено: если в данной фигуре существуют нечетные

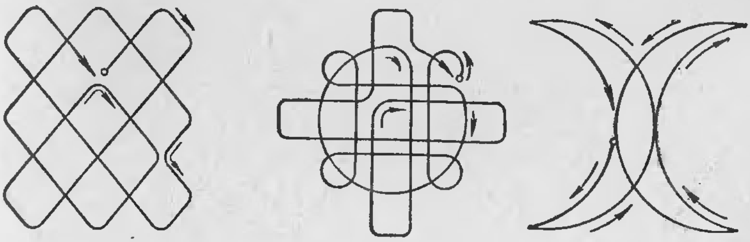


Рис. 182

узлы, то успешный росчерк должен начинаться в одном из них.

Зачерчивание подобных фигур принадлежит к числу очень интересных и поучительных развлечений; многие увлекаются такими рисунками. Мы приводим ряд интересных фигур и помещаем для двух из них решения, остальные предлагаем находчивости читателя (рис. 181).

Третий рисунок в верхнем ряду представляет собой знаменитую подпись Магомета, которую он высекал четырьмя взмахами кинжала или сабли.

А вот решение для трех верхних фигур (рис. 182).

Кроме задач, в которых требуется зачертить одним обходом карандаша уже нарисованную фигуру, можно предложить задачи, несколько отличные по форме, но аналогичные по содержанию.

Разделить равнобедренный треугольник непрерывной линией на 9 равных частей, не проводя более одного раза по одной и той же линии и не пересекая ни одной из них. Остроумное решение, приведенное здесь, не требует дальнейших пояснений (рис. 183).

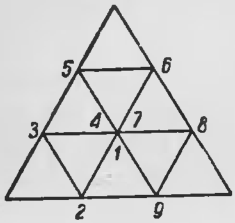


Рис. 183

Если кто-нибудь предложит зачертить одним обходом карандаша квадрат с двумя диагоналями, что, как мы указывали, невыполнимо, то можно ответить следующей шуткой (рис. 184).

Пусть лист бумаги обозначает прямоугольник $KLMN$; на этом листе должен быть начерчен квадрат. Согнем лист бумаги по линии PQ. Затем проводим частично на правой стороне, а частично на левой стороне листа линию AC, далее на левой стороне линию CD и снова частично на левой,

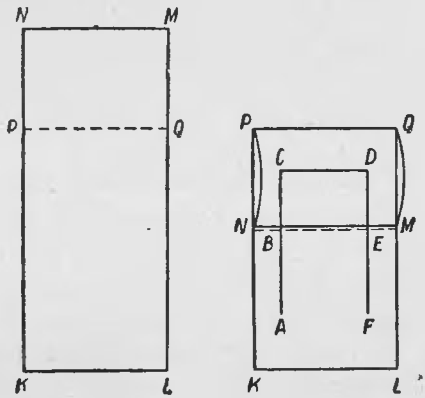


Рис. 184

частично на правой стороне линию DF. После этого мы расправляем лист бумаги и к оставшимся на правой стороне листа линиям AB и EF одним обходом карандаша легко дочерчиваем линии AE, EB, BF и FA.

В тесной связи с задачами на фигуры, которые можно начертить одним росчерком, находится знаменитая задача

Гамильтона, известная под названием «путешествие по двенадцатиграннику», которая помещена во второй части книги.

4. Игра в «15»

Игра эта происходит из Америки, где ее изобрел некий глухонемой в 1878 году. С невероятной быстротой и стремительностью эпидемии она распространилась в Соединенных Штатах, перешла в другие страны Америки и охватила Европу. Встречались люди, едущие в трамвае, на извозчике, ждущие своей очереди у касс и т. п., погруженные в эту игру. Достаточно сказать, что правительство Америки было вынуждено издать специальный указ, запрещающий служащим в рабочее время иметь при себе эту игру, так как они не могли справиться с собой и играли украдкой в любимую игру.

Это очень простая игра. Она состоит из деревянной рамки или квадратного, очень неглубокого ящичка, в котором находится 15 квадратных подвижных плиток — по 4 в каждом столбце, за исключением последнего ряда, в котором находится соответствующее 16-й плитке «пустое» место. Все 15 плиток пронумерованы.

Все эти плитки нужно вынуть, расставить как попало, а затем, пользуясь единственным «пустым» местом, передвигать их до тех пор, пока не будет получено такое расположение, которое мы видим на рисунке 185. Конечно, плитки можно не располагать в произвольном порядке, а поставить перед собой иную задачу: перемещая плитку, добиться другой расстановки чисел, например от первоначального расположения прийти к одному из следующих (см. рис. 186) или же им подобных.

Вскоре после распространения этой игры появились ее теории.

Эти теории мы не приводим здесь, с одной стороны, потому, что они довольно сложны, а с другой стороны, потому, что популяризация их, а также приведение способа предвидения разрешимости или неразрешимости данной расстановки, несомненно, отрицательно повлияло

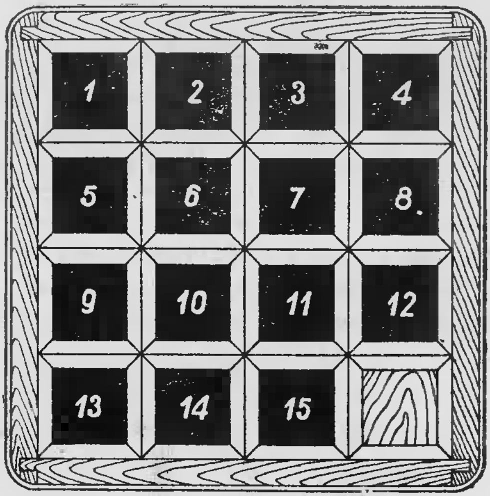


Рис. 185

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

1	3	6	10
2	5	9	13
4	8	12	15
7	11	14	

15	14	12	9
13	11	8	5
10	7	4	2
6	3	1	

Рис. 186

бы на интерес к игре и охладило бы первоначальное увлечение ею.

Заметим только, что не всегда можно достигнуть расстановки, указанной на рисунке 185. Неоднократно в самом нижнем ряду вместо последовательности 13, 14, 15 получается группа: 13, 15, 14.

В этом случае дальше трудиться над переставлением последних двух плиток не советуем, так как добиться правильного расположения невозможно.

Полезно было бы иметь шестнадцатую плитку с надписью 16, тогда можно было бы использовать эту игру для составления различными способами 16-клеточных волшебных квадратов.

5. Башня в Ханое

Почему эта игра носит такое экзотическое название, будто происходит из столицы Вьетнама? Вероятно потому, что знаменитый французский математик Люка составил ее под влиянием индийской легенды, которую мы приведем в конце.

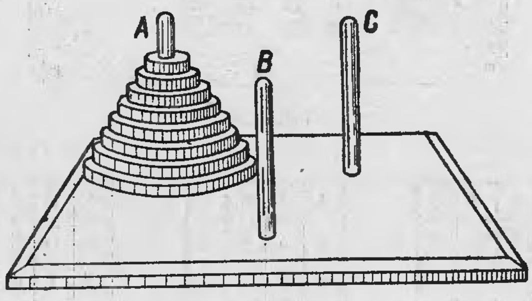


Рис. 187

Нужны восемь кружков, вырезанных из плотного картона или из дерева, с постепенно уменьшающимся диаметром, а также три железных или деревянных стержня, прикрепленных вертикально к доске. Кружки должны иметь в середине отверстия, через которые их можно нанизать на один из стержней так, как это указано на рисунке 187. В результате образуется что-то вроде башни.

Задача заключается в том, что нужно всю эту «башню» перенести со стержня A на стержень B, используя при этом третий подсобный стержень C.

При этом следует придерживаться следующих условий:

1. За один раз переносить можно только один кружок;

2. Снятый кружок можно нанизывать или на стержень, который совершенно свободен, или поверх кружка с бо́льшим диаметром. Ибо нанизывание большего кружка на меньший не разрешается.

Вероятно, не одному из читателей задача, «загроможденная» такими условиями, на первый взгляд покажется неразрешимой. Однако это вопрос терпения. Чтобы объяснить процесс правильного перемещения кружков, обозначим кружки цифрами 1, 2, 3,..., 7, 8, начнем с самого маленького, и весь процесс перемещения продемонстрируем на приведенной здесь таблице:

	Стержень A	Стержень C	Стержень B
Перед перемещением	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	—	—
После 1-го перемещения	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1	—
» 2-го »	3, 4, 5, 6, 7, 8	1	2
» 3-го »	3, 4, 5, 6, 7, 8	—	1, 2
» 4-го »	4, 5, 6, 7, 8	3	1, 2
» 5-го »	1, 4, 5, 6, 7, 8	3	2
» 6-го »	1, 4, 5, 6, 7, 8	2, 3	—
» 7-го »	4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3	—
» 8-го »	5, 6, 7, 8	1, 2, 3	4
. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . .

Сколько таких перемещений нужно выполнить, чтобы перенести всю башню?

Если через x мы обозначим искомое число перемещений кружков, а через n — число кружков, то $x = 2^n - 1$, следовательно, при 8 кружках мы имеем $x = 2^8 - 1 = 255$. Другими словами, в приведенной задаче нужно выполнить 255 перемещений, — слишком большое испытание терпения.

Поэтому мы советуем вместо 8 кружков взять 4, 5 или 6. При 4 кружках уже после 15 перемещений вся башня должна оказаться на стержне.

Индийская легенда о башне

В Индии, в городе Бенарес, под куполом главного храма, в месте, где находится центр земли, поставил Брахма на бронзовой дощечке три алмазных стержня высотой в один локоть и толщиной с пчелу. При сотворении мира на один из этих стержней были нанизаны 64 кружка из чистого золота с отверстиями в середине так, что получился усеченный конус.

Жрецы, сменяясь днем и ночью, беспрерывно перемещают золотые кружки с первого стержня на третий, используя при этом второй стержень, причем они должны строго придерживаться двух следующих правил: во-первых, за один раз не переносить никогда больше одного кружка; во-вторых, никогда не класть большего кружка на меньший. Когда жрецы закончат свою работу, наступит конец света...

Если кто-нибудь желает узнать, как скоро сбудется это любопытное предсказание, пусть примет к сведению короткие вычисления, приведенные ниже.

Жрецы должны выполнить столько же перемещений, сколько должно было быть зерен на шахматной доске, то есть 18 446 744 073 709 551 615. Если бы мы приняли, что жрецы ежесекундно перемещают один кружок, то их работа длилась бы не менее чем 5 миллиардов столетий. Как видно, еще долго ждать...

6. Кадриль Люка

А вот еще одна игра, основанная на перемещениях. В квадрате, состоящем из 49 клеток, черные и белые кружки расставлены так, как показано на рисунке 188.

Центральная клетка свободна. Пользуясь этой клеткой, следует переставить белые кружки на место черных, а черные на место белых. При этом кружок можно передвигать или на свободное поле, или же перемещать один кружок через другой, если за этим другим окажется свободное поле. Насколько Ханойская башня на первый взгляд кажется игрой очень трудной и запутанной, настолько эта кадриль на первый взгляд кажется игрой очень простой. В действительности же эта игра не такая уж легкая, и поэтому мы приводим здесь несколько практических указаний.

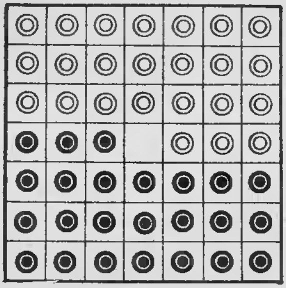


Рис. 188

Начать следует с центрального горизонтального ряда и проделать в нем полную перестановку. Затем нужно перейти к центральному вертикальному столбцу и, пользуясь каждым перемещением пустой клетки вверх или вниз, переставлять кружки в тот ряд, в котором временно находится пустая клетка центрального столбца.

Для того чтобы полностью переставить кружки, нужно выполнить 120 перемещений. Однако все это можно проделать также за один ход: повернув таблицу вместе со всеми кружками на 180°.

7. Мельничка

Теперь мы переходим к играм, в которых принимают участие два человека. Одной из самых легких игр для двух человек является мельничка. Она не требует абсолютно никаких приспособлений: достаточно листа бумаги, на котором чертится фигура, приведенная на рисунке 189, а также шести кружков из картона двух цветов, по три кружка для каждого игрока.

Игроки сначала поочередно устанавливают по одному кружку в избранных ими пунктах таблицы; установив же все

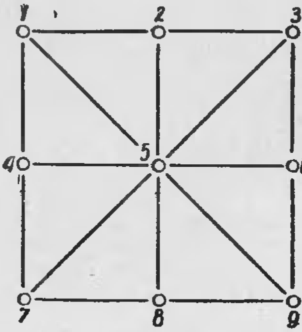


Рис. 189

кружки, их по очереди передвигают по начерченным линиям на новые места. Выигрывает тот, кто первый поставит свои три кружка на одной линии, что и называется мельничкой.

К сожалению, мельничка принадлежит к числу игр с неравными шансами: начинающий партию, играя внимательно, всегда выиграет, если поместит свой первый кружок в точке 5 — этот ход даст ему перевес.

8. Волк и овцы

И эта игра тоже с неравными шансами: играя внимательно, игрок, у которого оказались овцы, всегда выигрывает.

Играют на обычной шахматной доске с 64 клетками: 32 белыми и 32 черными. У одного игрока 4 овцы, то есть 4 кружка одинаковой величины, расставленных на четырех черных или белых клетках вдоль одного края, у другого же только волк (большой кружок), помещенный в клетке такого же цвета на противоположной стороне шахматной доски. Как волк, так и овцы могут передвигаться наискось только на одну клетку того же цвета, причем овцы передвигаются только вперед, в то время как волк имеет право ходить и назад. Волк выигрывает в том случае, если окажется позади всех овец; а овцы выигрывают только тогда, если окружат волка так, что он не сможет уже сделать ни одного хода.

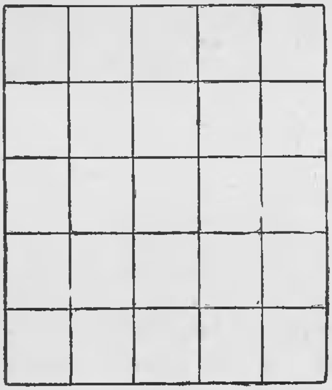


Рис. 190

9. Головоломки

Геометрических головоломок существует очень много, здесь же мы приводим их всего несколько.

А. Если вы спросите, сколько прямоугольников в этой фигуре (рис. 190), то многие, быстро пересчитав число делений, ответят без раздумий, что в этой фигуре 25 прямоугольников.

Клеток здесь действительно столько! Но различных прямоугольников (ведь об этом идет речь в нашей задаче) в этой фигуре несравненно больше, а именно 225. Кто сомневается, пусть проверит!

Б. У столяра есть одна доска длиной 0,80 *м*, шириной 0,30 *м*; а ему нужна доска других размеров: длиной 1,20 *м*, а шириной 0,20 *м*. Как он должен распилить свою доску?

Рисунок 191 показывает, как столяр вышел из затруднения.

В. Из двух шахматных досок, 36-клеточной и 64-клеточной (рис. 192), нужно сделать одну 100-клеточную,

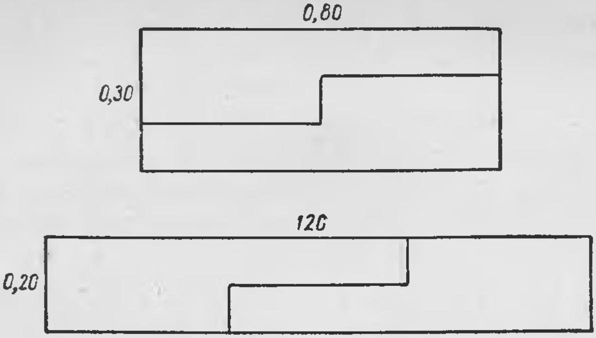


Рис. 191

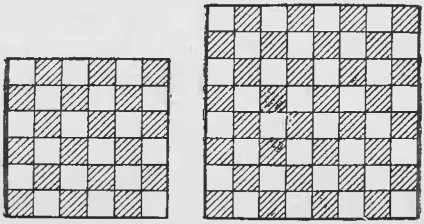


Рис. 192

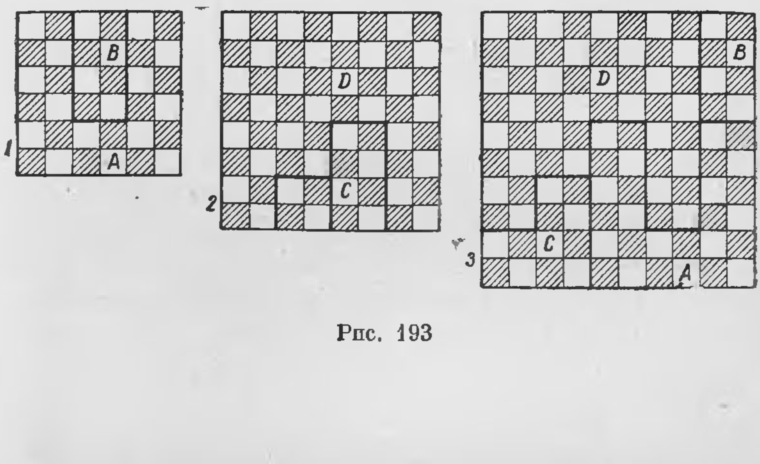


Рис. 193

причем ни одну из них нельзя делить более чем на две части. А вот очень искусное решение (рис. 193). Единственное ли оно?

Г. На берегу квадратного пруда в четырех его углах растут деревья.

Поверхность пруда нужно увеличить вдвое, не изменяя его формы и не вырубая деревьев.

Остроумный способ решения этой задачи приводим на рисунке 194.

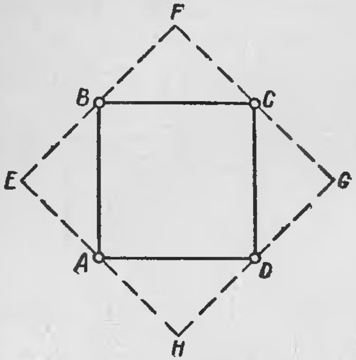


Рис. 194

Д. На куске полотна вышито 7 цветочков. Этот кусок полотна нужно разделить на части тремя сечениями по прямым линиям так, чтобы в каждой части оказалось по одному цветку.

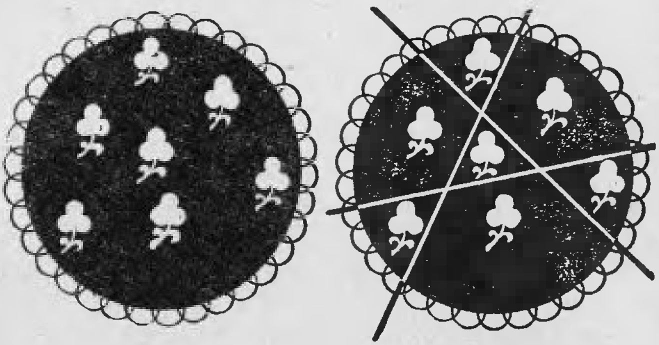


Рис. 195

Вот решение (рис. 195).

Решение основано на той особенности треугольника, что 3 прямые, составляющие треугольник, рассекают плоскость на 7 частей.

Е. Рассечь квадрат на 20 равных треугольников. Это очень остроумная и легкая головоломка.

Чтобы ее решить, нужно соединить прямыми линиями середины сторон квадрата с его вершинами, как указано на рисунке 196. Дальнейшее деление на треугольники будет уже очень легким.

Из этих 20 треугольников можно составить крест (рис. 197).

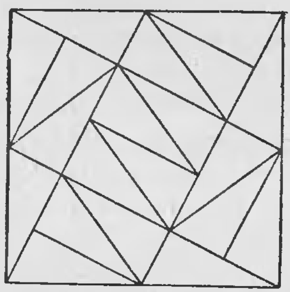


Рис. 196

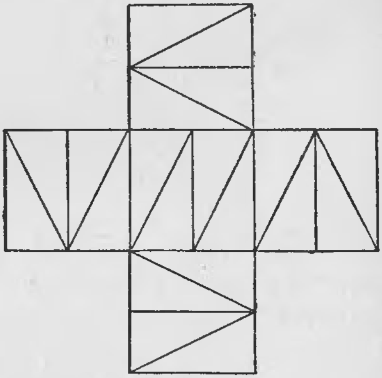


Рис. 197

Одновременно этот способ служит и для деления квадрата на 5 равных квадратов — он значительно проще, чем тот, который нужно применить при делении на 3 равных квадрата.

Ж. Разделить квадрат на три равных квадрата (рис. 198).

Отрезок AE на верхнем рисунке равен половине диагонали этого квадрата, а отрезки AF и CG являются перпендикулярами, опущенными из вершин на прямую DE, наконец, отрезки GH, GL и FK равны отрезку AF. Нижний рисунок показывает составление трех равных квадратов из треугольников и четырехугольников, полученных в результате вышеуказанного раздела.

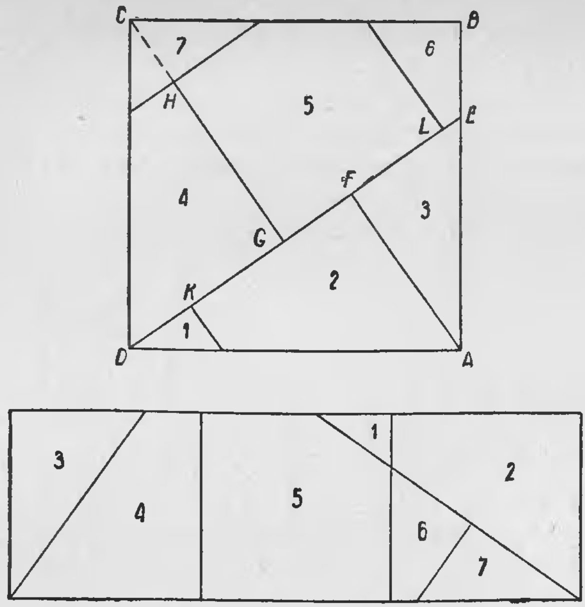


Рис. 198

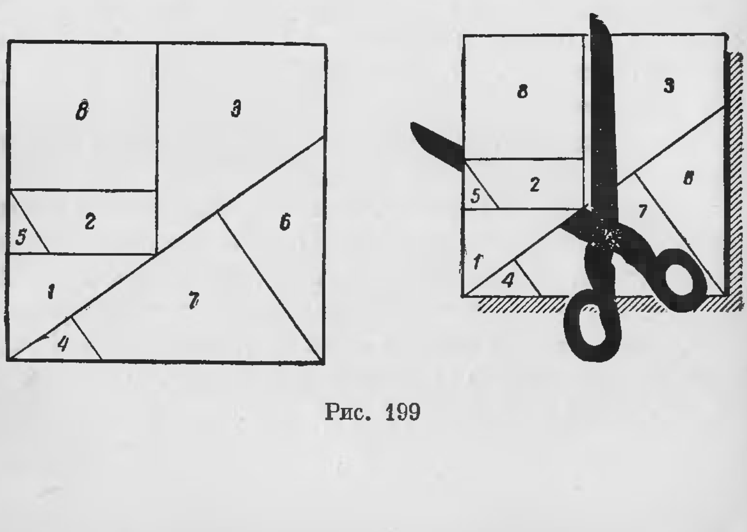


Рис. 199

3. Разделить квадрат на три квадрата со следующим соотношением полей 4:3:2.

На рисунке 199 приводим простой способ рассечения данного квадрата на части, из которых можно будет составить три квадрата с соотношением полей 4:3:2. Какие конструкции были использованы при выполнении сети

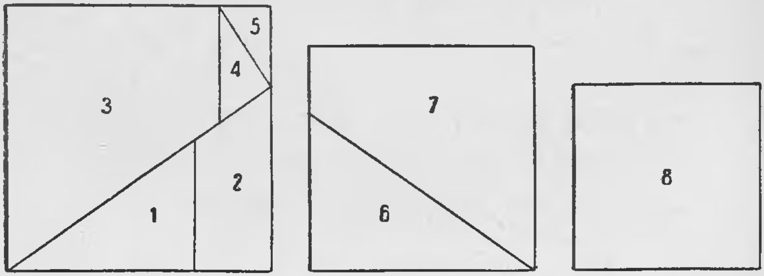


Рис. 200

делений — пусть читатель разберется сам. Скажем только, что гипотенуза прямоугольного треугольника 6 равна половине диагонали данного квадрата, а большее основание трапеции 3 равно $^2/_3$ стороны квадрата. А вот готовые квадраты (рис. 200). Советуем читателю, обозначив длину стороны данного квадрата через a, вычислить длину всех отрезков, представляющих собой границы отдельных частей приведенных выше фигур.

10. Таинственное исчезновение

Нужно взять картон в форме прямоугольника и начертить на нем 12 одинаковых палочек, расположенных на равном расстоянии друг от друга, как указано на рисунке 201(1).

Затем картон следует разрезать вдоль линии, соединяющей верхний конец крайней левой палочки с нижним концом крайней правой. Если мы передвинем разрезанные части на одно расстояние, разделяющее палочки, то одна палочка таинственным образом исчезнет; это можно

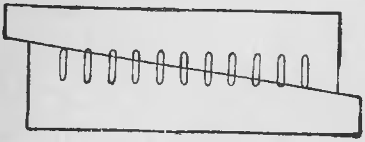


Рис. 201(1)

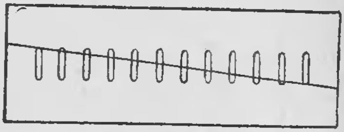


Рис. 201(2)

проверить на рисунке 201(2), а лучше на настоящей дощечке или картоне.

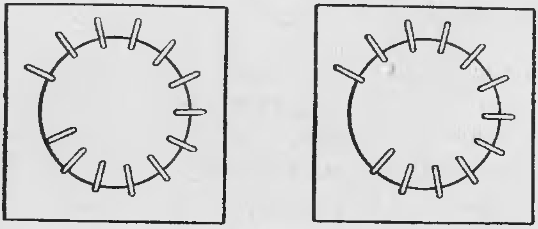
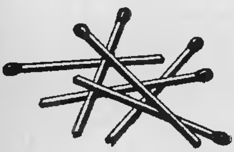


Рис. 202

Еще более эффектным является таинственное исчезновение 13-й палочки на квадратном картоне с подвижной центральной частью, как показано на рисунке 202.



11. Фокусы со спичками

Из бесчисленного множества математических фокусов со спичками мы приводим всего несколько, относящихся к числу более трудных, так как легкие читатель сумеет составить сам в большом количестве. Мы не ограничиваем самостоятельной изобретательности читателя...

Из 24 спичек составить 9 квадратов, затем отобрать 8 спичек так, чтобы остальные образовали 2 квадрата (рис. 203).

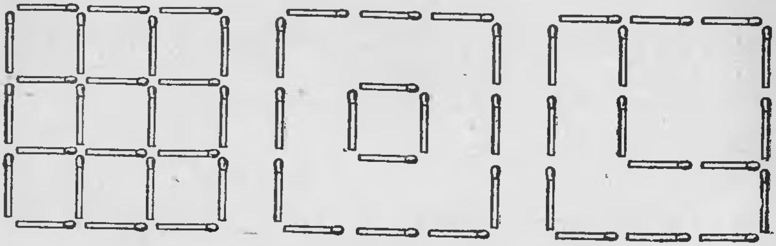


Рис. 203

Из 6 спичек составить четыре треугольника.

Для этого нужно из 3 спичек выложить на столе треугольник, затем при помощи 3 остальных спичек построить четырехгранник с четырьмя треугольными гранями, причем каждая спичка будет одним концом опираться на угол лежащего треугольника, а вторым — на 2 другие спички.

Из спичек составлено следующее абсурдное уравнение (рис. 204). Однако достаточно переложить только одну

Рис. 204

Рис. 205

спичку, и это абсурдное уравнение примет вид совершенно правильного.

Вот решение, которое в самом деле нелегко отыскать, несмотря на долгие размышления (рис. 205).

Из 18 спичек можно легко составить два четырехугольника, из которых один будет иметь площадь, вдвое больше другого.

Несравненно труднее разместить спички так, чтобы получить четырехугольник, площадь которого будет втрое

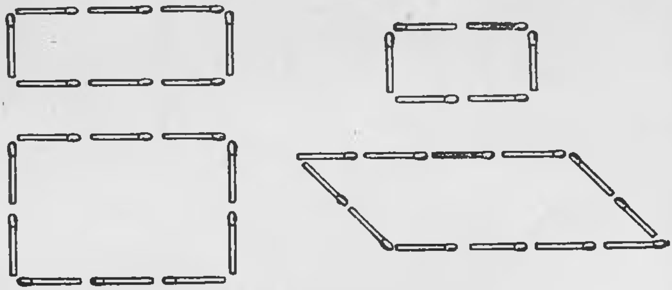


Рис. 206

больше другого (рис. 206). Эта шутка основана на том, что мы все время говорим о четырехугольниках, но в первый раз составляем прямоугольник: тем самым слушателю и зрителю внушают, что он должен решить эту задачу на прямоугольниках, а это невозможно.

Пусть кто-либо возьмет произвольное число спичек и выложит их в два ряда так, чтобы в верхнем ряду было на одну спичку больше, чем в нижнем. Не обращая внимания на результат этих действий, мы даем следующие указания:

1. Снять с верхнего ряда некоторое число спичек, например 7.

2. Снять с нижнего ряда столько спичек, сколько их осталось в верхнем.

3. Снять с верхнего ряда все оставшиеся спички.

Теперь мы можем по-прежнему, не глядя на стол, немедленно и точно сказать, сколько осталось спичек.

Конечно, число оставшихся спичек будет на одну меньше того, которое мы назвали вначале, следовательно, 6.

При каждом повторении этой шутки следует менять число снимаемых спичек, а также предлагать, чтобы в верхнем ряду было на две или три спички больше, чем в нижнем.

Из 8 спичек, выложенных в два ряда, 4 передвинуть так, чтобы образовался крест. Вот первоначальное расположение спичек (рис. 207) и решение (рис. 208).

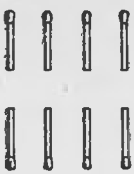


Рис. 207

Рис. 208

12. Различные математические шутки

Один симпатичный человек, о котором постоянно говорили, что он «золотой человек», спросил знакомого ювелира:

— Сколько бы я мог стоить, если бы действительно был из золота? Я вешу 75 килограммов. Трудно ли это определить?

— Нет ничего легче! — ответил ювелир. — Достаточно 75 000 граммов умножить на цену одного грамма золота.

И он быстро вычислил громадную сумму.

Но при этом разговоре присутствовал некий математик, который не замедлил вмешаться:

— Дорогой мой! — воскликнул он. — Не продавайтесь за бесценок! Ювелир хочет вас «обмануть», так как, если вы сейчас весите 75 килограммов, то из золота вы бы весили намного больше.

— Да, это правда! Спасибо, что вы меня предостерегли и научили по-настоящему себя ценить!

Предположим, что длина железнодорожной линии между Варшавой и Познанью равна 300 *км*. В одно и то же время из Варшавы выходит скорый поезд, идущий со скоростью 60 *км/час*, а из Познани товарный поезд со скоростью всего лишь 30 *км/час*.

Который из этих поездов будет ближе к Варшаве в момент встречи?

Может ли плоское зеркало дать увеличенное изображение?

Конечно! Оно может увеличить число более чем в 7 раз!

Для этого достаточно на листе бумаги написать число 108 и повернуть его лицом к плоскому зеркалу, в зеркале мы прочтем 801.

Из приведенных здесь 9 цифр нужно вычеркнуть 6 цифр таким образом, чтобы сумма остальных была равна 20.

1 1 1
7 7 7
9 9 9

Вот решение: вычеркнуть нужно единицу, стоящую на первом месте слева, все три семерки и две девятки слева.

Речь идет о цифрах, а суммируют числа.

В шкафу стоят два больших тома научного произведения: один толщиной 3 *см*, а другой 5 *см*. Оба тома прекрасно переплетены, а толщина переплета равна 3 *мм*. В шкаф забрался жучок, который точит бумагу. Ежедневно он проделывает в бумаге туннель длиной 1 *см*, а в переплете только 6 *мм*. За сколько дней он просверлит эти книги от первой страницы до последней?

Конечно, в течение одного дня, так как книги в библиотеке стоят всегда таким образом, что, для того чтобы перебраться с первой страницы первого тома к последней странице второго, жучку нужно будет перегрызть только два переплета.

В корзине лежат 9 больших красивых яблок. Их нужно разделить между 9 девочками так, чтобы каждая из них получила по яблоку и чтобы 1 яблоко осталось в корзине.

Нужно 8 девочкам дать по одному яблоку, а 9-й — оставшееся яблоко, но... вместе с корзинкой.

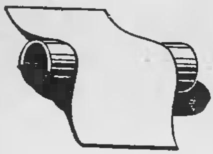
Таким образом, условие задачи будет выполнено полностью.

Одна добрая мама купила для своих семерых детей 5 больших и 5 маленьких яблок — конечно, с намерением разделить их поровну между своими детьми. Каким образом ей легче всего выполнить свое намерение?

Сделав из всех купленных яблок компот, суп или пирог.

Можно ли из одной точки начертить циркулем эллипс?

Можно, только картон, на котором должен быть начерчен эллипс, нужно положить на боковой стороне деревянного цилиндра, или картонной трубы, или же трубы из мягкого металла. Тогда одним оборотом обычного циркуля мы сможем начертить эллипс.



А вот несколько различных ответов на вопросы, можно ли одним раствором циркуля описать круги с различными диаметрами (рис. 209).

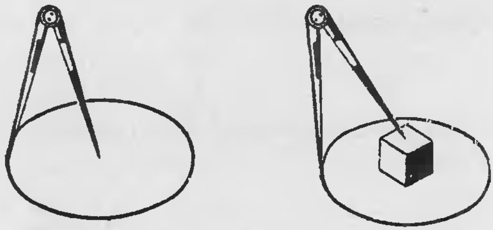


Рис. 209

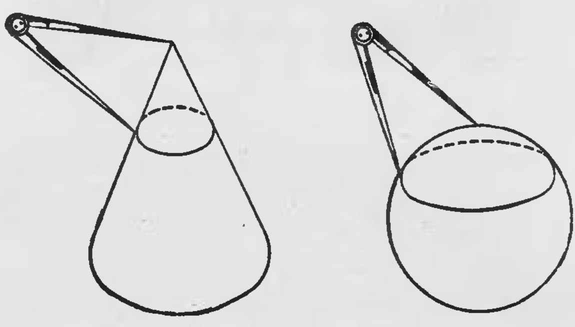


Рис. 210

И, наконец, удивительная пробка, которой можно заткнуть как треугольное, так и квадратное или круглое отверстие (рис. 210).

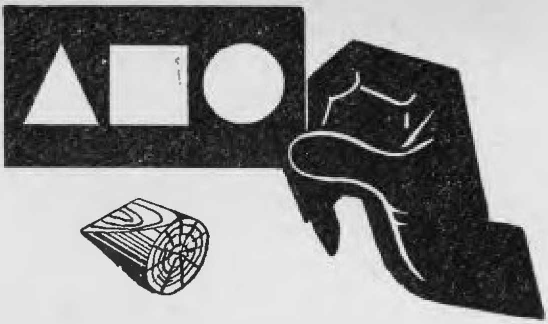


Рис. 211

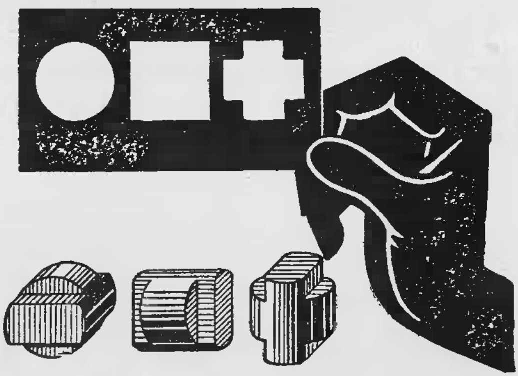


Рис. 212

А вот вторая разновидность этого изобретения, правда не практичного, но удивительно остроумного (рис. 211, 212).

Часть вторая

I. ПИФАГОРИАНА

1. Пифагорейская звезда

Одним из величайших математиков древности был Пифагор из Кротона. Его многочисленные ученики свято почитали своего учителя.

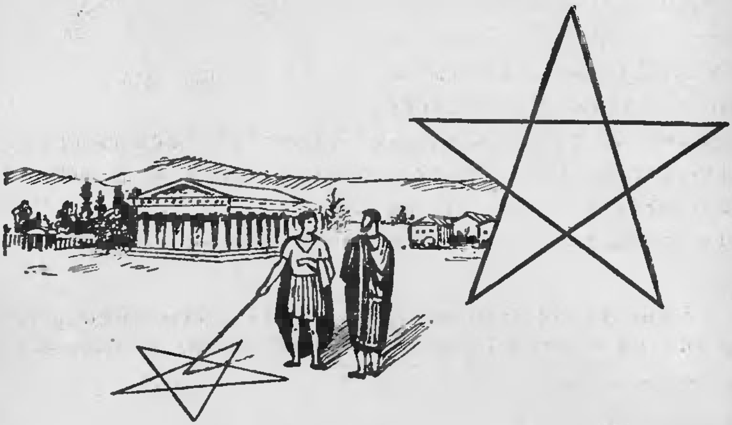


Рис. 213

Излюбленной геометрической фигурой пифагорейцев был пентаграмм, называемый также пифагорейской звездой. Эту фигуру можно получить, если продолжить стороны правильного пятиугольника до их взаимного пересечения. Пифагорейцы пользовались этой фигурой, вычерчивая ее на песке, чтобы приветствовать и узнавать друг друга.

Фигура эта в самом деле необычайно интересна: она обладает свойствами, выделяющими ее среди других звезд. Сумма углов пентаграмма, как мы увидим ниже, равняется двум прямым углам и, следовательно, напоминает нам треугольник, сумма углов которого также составляет 180° (рис. 213).

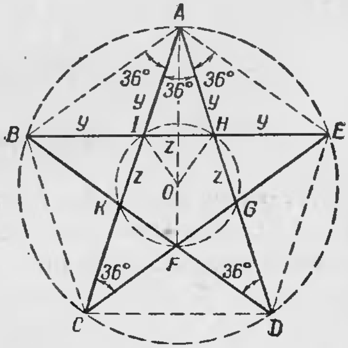


Рис. 214

Еще более интересными свойствами обладают лучи пифагорейской звезды (рис.214). Обозначим в пентаграмме $ABCDE$ длины отрезков $AI=BK=CF=\ldots$ через y, а длины отрезков $HI=IK=$ $=KF=\ldots$ через z. Треугольник IAH будет равнобедренный с углами[1] у основания, равными 72°, угол BAH равен[2] также 72°. Следовательно, треугольник HBA будет равнобедренный и подобный треугольнику IAH. Имеем $AB=y+z$. Отрезок AB представляет собой сторону пятиугольника $ABCDE$, опи-

---

[1] Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна $2dn-4d$, где n—число его сторон, а $d=90°$. Значит, угол правильного пятиугольника $KIH=\dfrac{2\cdot 90\cdot 5-4\cdot 90}{5}=108°$. Отсюда смежный угол $IAH=72°$.

[2] Каждая из равных хорд $BC=CD=\ldots$ стягивает дугу в $\dfrac{360}{5}=72°$. Угол $BAH=$ углу BAD, который, как вписанный угол, измеряется половиной дуги, на которую он опирается: $\dfrac{72+72}{2}=$ $=72°$.

санного около пентаграмма. Треугольник ADB — равнобедренный и подобен треугольникам IAH и BAH, поскольку угол у вершины равен 36°.

Таким образом, на основе этого тройного подобия можно написать следующую пропорцию:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{HA}{AB}=\frac{IH}{HA},$$

или

$$\frac{y+z}{2y+z}=\frac{y}{y+z}=\frac{z}{y}.$$

А это значит, что $AK : AC = KC : AK$ и $AI : AK = IK : AI$. Следовательно, в точке K было произведено золотое сечение стороны AC, то есть такое деление отрезка на две части, при котором бо́льшая часть его так относится ко всему отрезку, как меньшая часть к большей. Подобным образом отрезок AK оказался поделенным в точке I в отношении золотого сечения. (В древности золотое сечение имело большое значение в архитектонических пропорциях.) Это самое золотое сечение легко обнаружить во всех точках пересечения лучей звезды Пифагора.

Звездными многоугольниками занимался известный польский математик Ян Брожек из Кужелова (1585—1652).

2. Гордость пифагорейской математической мысли

Самой знаменитой теоремой Пифагора является теорема о том, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме квадратов, построенных на его катетах.

И обратное тоже справедливо: если стороны a, b, c треугольника отвечают пифагорейскому условию:

$$a^2+b^2=c^2,$$

то треугольник будет прямоугольным, с прямым углом, лежащим против стороны c.

Особенно интересны треугольники, все три стороны которых выражаются целыми числами, подчиняющимися пифагорейскому условию. Такие треугольники называются пифагорейскими.

Так, например, треугольник со сторонами 3, 4, 5 отвечает пифагорейскому условию:

$$3^2+4^2=5^2$$

и является прямоугольным. Это простейший пифагорейский треугольник.

Вот несколько пифагорейских треугольников:

$$\begin{array}{lll}
a = 3 & b = 4 & c = 5 \\
a = 5 & b = 12 & c = 13 \\
a = 15 & b = 8 & c = 17 \\
a = 7 & b = 24 & c = 25 \\
a = 21 & b = 20 & c = 29 \\
a = 9 & b = 40 & c = 41
\end{array}$$

Легко убедиться в том, что все эти треугольники отвечают пифагорейскому условию $a^2 + b^2 = c^2$ и, следовательно, являются прямоугольными.

В практике при построении прямого угла (а значит, при построении взаимно перпендикулярных прямых линий) треугольник со сторонами 3, 4, 5 безусловно был уже в глубокой древности известен египтянам и другим народам древнего Востока. Не является случайным то обстоятельство, что именно такие пропорции археологи находят в размерах тесаных плит пирамиды Хефрена. Еще более знаменательным, однако, является тот факт, что так называемая царская комната в знаменитой пирамиде Хеопса имеет размеры, особенным образом связанные с числами 3, 4, 5. Диагональ всей комнаты содержит 5 тех же самых единиц, которых самая длинная стена имеет 4, а диагональ самой маленькой стены — 3 единицы.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 (рис. 215) считался в древности магической фигурой. Он обладает еще и другими интересными особенностями. Периметр его выражается числом 12, площадь же равняется 6, то есть числу, следующему по порядку за тремя числами, соответствующими длинам его сторон; сверх того, $6^3=3^3+4^3+5^3$.

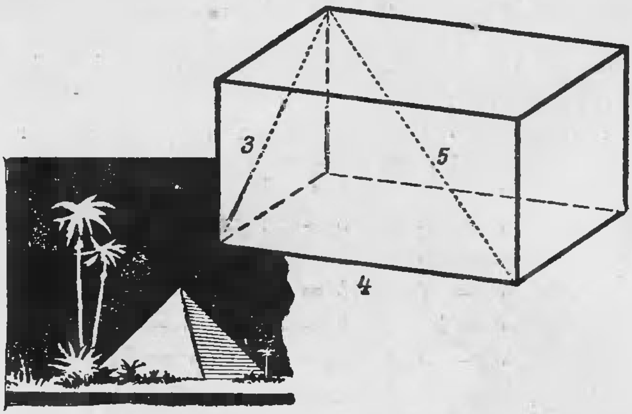


Рис. 215

Неудивительно поэтому, что, по мнению Плутарха, это самый прекрасный из всех треугольников.

Не подлежит при этом сомнению, что, как и раньше, так и сейчас, сельские плотники, закладывая фундамент избы или хозяйственных построек, чтобы получить прямой угол, чертят треугольник со сторонами 3, 4, 5; это же самое тысячи лет назад проделывалось при строительстве великолепных храмов в Египте, Вавилоне, Китае, а, вероятно, также и в Мексике (рис. 216).

Пифагор не открыл, следовательно, это свойство прямоугольного треугольника — он только первым сумел его обобщить и доказать, перевести его из области практики в область науки. Как он это сделал, неизвестно.

Историк математики М. Кантор предполагает, что это доказательство было скорее не принципиальным, а лишь подтверждением, проверкой данного свойства на ряде частных видов треугольников, начиная с равнобедренного прямоугольного треугольника, который дает, как это видно на рисунке, вполне очевидные результаты.

В настоящее время теорема Пифагора доказана сотней способов, да, сотней способов! Хотя почти каждое столетие доставляло новые виды или, по крайней мере, новые замыслы доказательства уже многократно доказанной теоремы, но и сейчас еще стремление к умножению числа этих доказательств не исчезло.

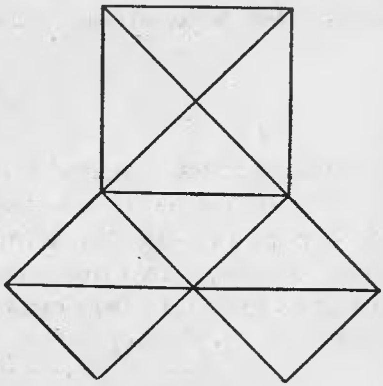


Рис. 216

Уже Евклид ссылается в своих «Началах» (книга I) на восемь способов, которые мы приводим здесь только в виде рисунков 217, 218 и надеемся, что читатель с интересом сам найдет нужные доказательства.

Кроме доказательств Евклида, приведем еще несколько наиболее интересных математических рассуждений различного происхождения, касающихся равновеликости фигур.

Во всех этих доказательствах примем следующие обозначения:

$$\angle A = 90°;\ BC = a,\ CA = b,\ AB = c \text{ (рис. 219).}$$

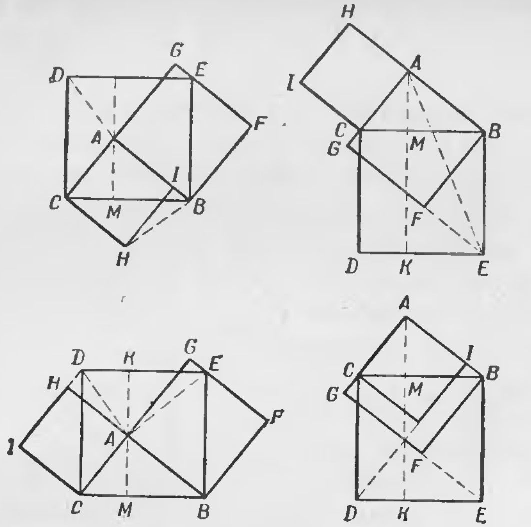


Рис. 217

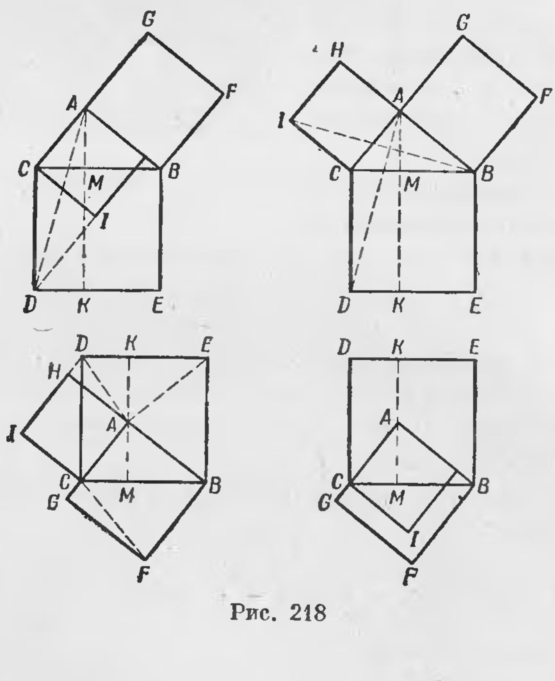


Рис. 218

Доказательство Н а с с и р-э д-Д и н а (1594 год).

$$\triangle GAL = \triangle ABC, \quad LA = CB,$$
$$\angle GAL = \angle ABC = \angle CAM,$$

следовательно, $LAMK$ является прямой линией.

Получаем фигуры с равными площадями:

$$DKMC = CALD' = \\ = CAHI = b^2$$

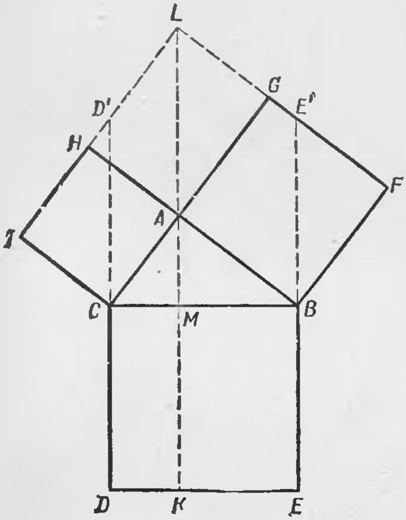


Рис. 219

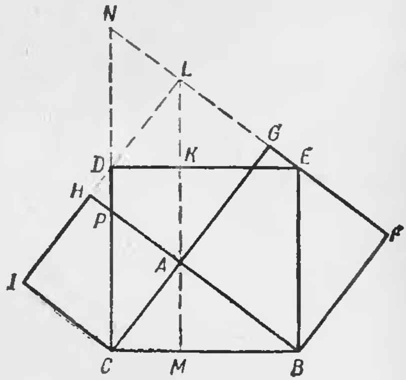


Рис. 220

и аналогично

$$KEBM = ABE'L = ABFG = c^2.$$

Но

$$DEBC = DKMC + KEBM \text{ и } DEBC = a^2,$$

следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Доказательство Г о ф м а н а (1821 год).

Продолжим отрезок CD до пересечения с продолжением прямой в точке N (рис. 220). Получим фигуры с равными площадями:

$$PALN = CALD = CAHI = b^2;$$
$$ABEL = ABFG = c^2;$$
$$PBEN = CBED = a^2.$$

Но

$$PBEN = PALN + ABEL,$$

а следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

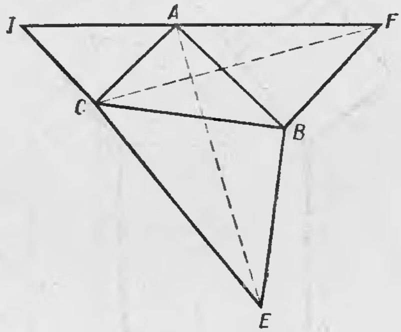


Рис. 221

Более оригинально другое доказательство того же автора.

Проведем отрезок BF, перпендикулярный отрезку AB (рис. 221) и равный ему, затем отрезок CI, перпендикулярный отрезку CA и равный ему, и, наконец, проведем перпендикулярный отрезку BC и равный ему отрезок BE. Легко доказать, что точки F, A, I лежат на одной прямой.

Четырехугольники $IFBC$ и $ABEC$ равновелики, так как $\triangle CBF = \triangle ABE$, $\triangle ICF$ равновелик $\triangle ACE$. Отнимая от обоих четырехугольников общий им треугольник ABC, получим:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Доказательство Темпельгофа (1769 год).

$$\triangle LDE = \triangle ABC \text{ (рис. 222)},$$
$$\triangle AGH = \triangle ABC,$$
$$LDCA = FBCI = ABEL$$

и

$$IHGF = ICBF,$$

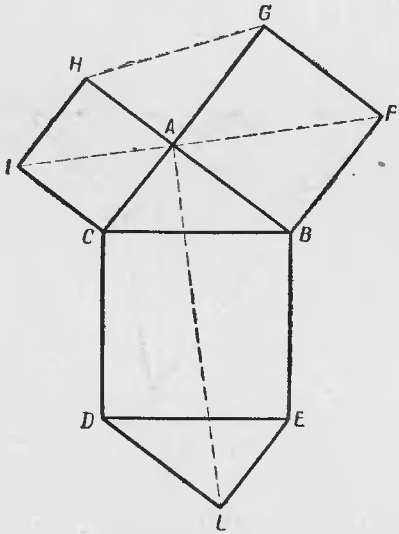


Рис. 222

следовательно,

$$ICBFGH = ACDLEB.$$

Эти шестиугольники имеют общий треугольник ABC, а также равные треугольники $AGH = LDE$, и, следовательно, остальные части этих многоугольников являются равновеликими, а это значит, что

$$CDEB = CAHI + ABFG,$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Доказательство Ренана (1889 год).

$$\triangle HRA = \triangle ABC, \text{ поэтому } RA = BC \text{ (рис. 223).}$$

Заметим, что

$$\triangle IBC = \triangle CAR; \qquad \triangle FBC = \triangle BAR.$$

Легко доказать, что

$$RA \perp BC, \quad BI \perp CR \quad \text{и} \quad CF \perp BR,$$

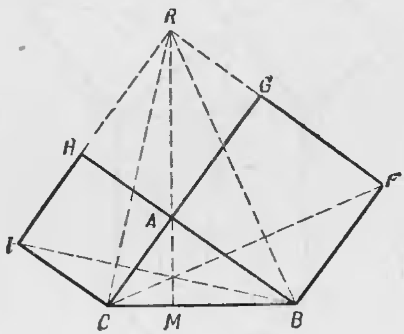


Рис. 223

так как RA (то есть RM), BI и CF являются высотами треугольника BCR и поэтому пересекаются в одной точке.

$$\triangle CAR = \frac{1}{2} CA \cdot RG = \frac{1}{2} b \cdot b = \frac{1}{2} b^2,$$

$$\triangle BAR = \frac{1}{2} BA \cdot RH = \frac{1}{2} c \cdot c = \frac{1}{2} c^2.$$

Следовательно,

$$\triangle CAR + \triangle BAR = \frac{1}{2}(b^2 + c^2).$$

Но

$$\triangle CAR = \frac{1}{2} RA \cdot CM, \quad \text{а} \quad \triangle BAR = \frac{1}{2} RA \cdot BM,$$

следовательно,

$$\triangle CAR + \triangle BAR = \frac{1}{2} RA (CM + BM) =$$
$$= \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} a^2.$$

Отсюда вывод, что

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Все вышеприведенные доказательства основываются исключительно на равновеликости фигур. Если, кроме

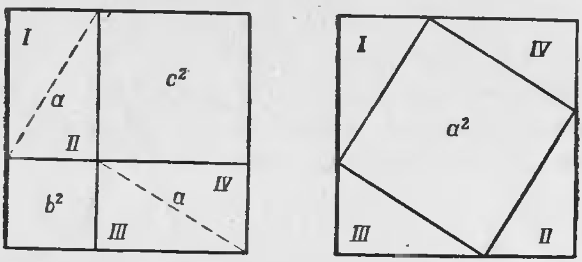


Рис. 224

этого, применить перестановку слагаемых, возникнет другой род доказательств, в котором учитывается ряд новых идей.

Вот предполагаемое доказательство самого Пифагора.

Построим квадрат, сторона которого равняется сумме катетов b и c данного прямоугольного треугольника (рис. 224). Разделим этот квадрат на два квадрата b^2 и c^2 и на два равных прямоугольника со сторонами b и c.

В свою очередь, разделим эти прямоугольники на четыре равных прямоугольных треугольника I, II, III, IV. Укладывая эти треугольники так, как показывает соседний рисунок, получим посередине квадрат a^2.

Отсюда следует, что квадрат со стороной $b + c$, уменьшенный на $2bc$, дает в первом случае $b^2 + c^2$, а во втором a^2, и значит:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

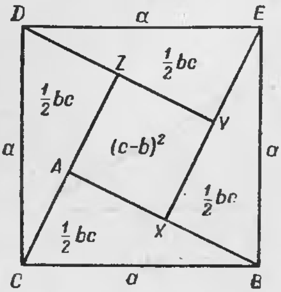


Рис. 225

Доказательство Бхаскари (знаменитого автора Лилавати, XII столетие).

Великий индийский математик подписал к рисунку только одно слово: *Смотри* (рис. 225).

Доказательство Марри (1887 год).

Построим квадраты $BCDE = a^2$ и $ABFG = c^2$ (рис. 226). Точка E окажется на прямой GF. Из точки D проведем прямую DP, параллельную GF и DL, параллельную AG. Образуется квадрат $DLGP = b^2$.

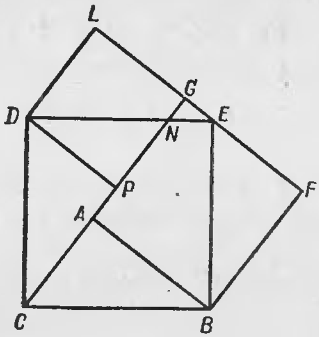


Рис. 226

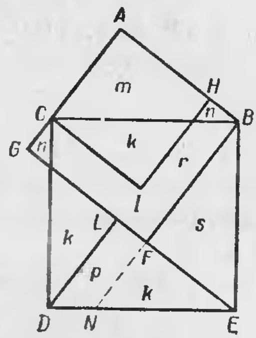


Рис. 227

Вычитая из пятиугольника $BCDLF$ один раз треугольники ABC и DPC, а другой раз равные им треугольники LED и EFB, получаем $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство Рейхенбергера (1775 год).

$$a^2 = p + 3k + r + s \text{ (рис. 227)};$$
$$b^2 + c^2 = 2m + 2n + 2k + r.$$

Из равенства треугольников ABC, FBE, LED вытекает, что

$$m + n = s = p + k,$$

значит,

$$b^2 + c^2 = s + p + k + \\ + 2k + r = a^2.$$

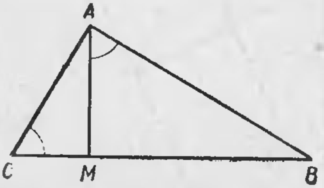


Рис. 228

Третий род доказательств — доказательства алгебраические. Среди них первое место занимает предполагаемое доказательство Пифагора.

Треугольник ABC подобен треугольнику MBA; стало быть,

$$BC : AB = AB : BM$$

(рис. 228);

отсюда

$$AB^2 = BC \cdot BM.$$

Треугольник ABC подобен треугольнику MAC, следовательно,

$$BC : AC = AC : MC,$$

отсюда

$$AC^2 = BC \cdot MC.$$

Складывая равенства

$$AB^2 = BC \cdot BM \text{ и } AC^2 = BC \cdot MC,$$

получаем

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BM + MC).$$

Но

$$BM + MC = BC,$$

следовательно,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Если бы действительно Пифагор таким способом доказывал свою знаменитую теорему, то это означало бы, что ему был знаком целый ряд теорем, приписываемых в настоящее время Евклиду.

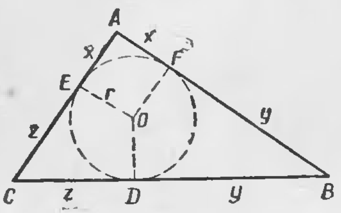


Рис. 229

Доказательство Мёльманна.

Площадь треугольника ABC равняется $\frac{b \cdot c}{2}$ (рис. 229), а также равняется $\frac{p \cdot r}{2}$, то есть половине произведения периметра треугольника на радиус круга, вписанного в треугольник, а радиус r круга, вписанного в прямоугольник, равняется:

$$x = \frac{b + c - a}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{b \cdot c}{2} = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c)}{2} \cdot \frac{(b + c - a)}{2}.$$

Из данного уравнения следует, что

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3. Пифагорейские треугольники

Теперь рассмотрим пифагорейские треугольники, то есть такие треугольники, стороны которых выражены целыми числами a, b, c, отвечающими условию

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Это будут, как мы уже знаем, прямоугольные треугольники. Ясно, что если из чисел a, b, c два имеют общий делитель, то и третье число тоже его имеет. Поэтому в дальнейших рассуждениях ограничимся такими целыми числами, которые не имеют общего делителя (кроме единицы).

Пифагору приписывается ряд интересных наблюдений в области применения арифметики к геометрии.

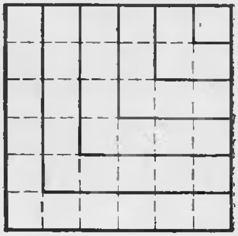


Рис. 230

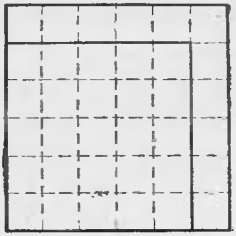


Рис. 231

Между прочим, он заметил, что сумма последовательных нечетных чисел дает полный квадрат (рис. 230):

$$
\begin{aligned}
&1 + 3 = 2^2,\\
&1 + 3 + 5 = 3^2,\\
&1 + 3 + 5 + 7 = 4^2\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

и что каждый такой *гномон* представляет собой разность двух квадратов:

$$
\begin{aligned}
2^2 - 1^2 &= 3,\\
3^2 - 2^2 &= 5,\\
4^2 - 3^2 &= 7,\\
5^2 - 4^2 &= 9,\\
6^2 - 5^2 &= 11,
\end{aligned}
$$

или, в общем виде:

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \text{ (рис. 231).}$$

Пифагор сформулировал также правило, по которому он мог находить целые числа для своих треугольников. В современной символике это правило выражается равенством:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2, \qquad (1)$$

где вместо n можно подставить любое натуральное число.

Вот табличка, построенная на этом принципе:

n	I катет $2n + 1$	II катет $2n\,(n + 1)$	Гипотенуза $2n^2 + 2n + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
...	...	...	...

Из равенства (1) и из таблицы видно, что числа, выражающие II катет и гипотенузу, стоят непосредственно друг за другом в натуральном ряду чисел. Поэтому можно сказать, что если где-нибудь в натуральном ряду чисел мы найдем два соседних числа, сумма которых составит полный квадрат, то эти числа вместе с корнем второй степени из их суммы будут выражать комплекс сторон пифагорейского треугольника:

$$\underbrace{4,\ 5}_{3^2} \ldots \underbrace{12,\ 13}_{5^2} \ldots \underbrace{24,\ 25}_{7^2} \ldots \underbrace{40,\ 41}_{9^2} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{60,\ 61}_{11^2} \ldots \underbrace{84,\ 85}_{13^2} \ldots$$

Кроме равенства (1), известны и другие, гораздо более поздние равенства, употребляемые для нахождения пифагорейских чисел.

Вот одно из них:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2. \qquad (2)$$

В данном равенстве вместо m и n можно подставлять любые целые числа. Принимая, например, $m = 3$, $n = 1$, получаем $10^2 = 8^2 + 6^2$. Значит, мы получили такую комбинацию чисел: 6, 8, 10, которую не охватывает приведенная выше таблица. Равенство (2), следовательно, имеет более общий характер, нежели равенство (1).

Но этого мало. Равенство (2) содержит в себе все возможные пифагорейские тройки. Если мы захотим избежать повторения подобных пифагорейских треугольников (например, подобными являются треугольники со сторонами 3, 4, 5 и 6, 8, 10), то надлежит соблюдать следующие правила:

1) одно из чисел m и n должно быть четным, другое — нечетным;

2) числа m и n должны быть простыми относительно друг друга, то есть не должны иметь никакого общего делителя, кроме единицы;

3) $m > n$.

Приводим таблицу, составленную по указанным правилам:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
4	1	15	8	17
5	4	9	40	41
5	2	21	20	29
6	5	11	60	61
6	1	35	12	37
7	6	13	84	85

m	n	a	b	c
7	4	33	56	65
7	2	45	28	53
8	7	15	112	113
8	5	39	80	89
8	3	55	48	73
8	1	63	16	65
9	8	17	144	145
9	4	65	72	97
9	2	77	36	85
...	...	...	...	...

4. Вторая знаменитая теорема Пифагора

Второй, исключительной по значению геометрической теоремой, приписываемой Пифагору, является теорема о сумме углов треугольника, равной двум прямым углам.

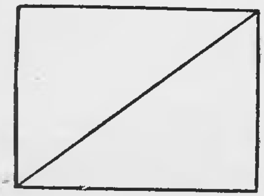


Рис. 232

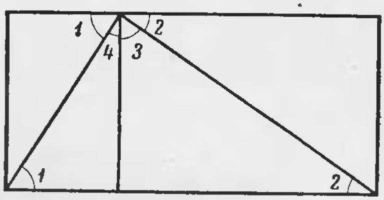


Рис. 233

Историки математики стараются выяснить, каким способом гениальный математик доказывал эту теорему.

Вероятно, он начал с прямоугольных треугольников и посредством дополнения до прямоугольников (рис. 232) старался доказать правильность рассматриваемой теоремы.

Затем он заметил, что каждый треугольник можно разделить перпендикуляром, опущенным из вершины, на два прямоугольных треугольника и оба их дополнить до двух прямоугольников (рис. 233).

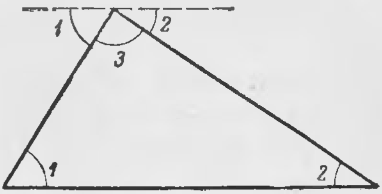


Рис. 234

Не исключено, однако, что Пифагор доказывал свою теорему при помощи прямой, проведенной через вершину треугольника параллельно основанию (рис. 234).

Однако в таком случае нужно допустить, что предварительно он знал теорему, приписываемую сейчас Евклиду, о двух параллельных прямых, пересекаемых третьей прямой.

5. Пифагорейский круг

Пифагор, как утверждает его ученик Прокл, с особенным увлечением занимался прогрессиями, как арифметическими, так и геометрическими. Поэтому возможно, что идея пифагорейского круга, которую разбирает в своей книге, посвященной арифметике, пифагореец Ямвлих, принадлежит его учителю.

Свойства пифагорейского круга основываются на некоторых интересных числовых сопоставлениях, а именно: если вдоль окружности написать натуральный ряд чисел, то есть 1, 2, 3, ... до n, а затем в обратную сторону от n до 1, то сумма всех этих чисел будет равна n^2 (рис. 235, 236).

Действительно, пифагорейский круг представляет, собственно говоря, сумму двух прогрессий: 1, 2, 3, ..., $n-1$ и числа n.

Сумма $n - 1$ чисел натурального ряда, начиная с единицы, равна

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, сумма двух таких прогрессий дает $n(n-1)$, то есть $n^2 - n$. Если к этой сумме прибавить еще n, то получим:

$$n^2 - n + n = n^2.$$

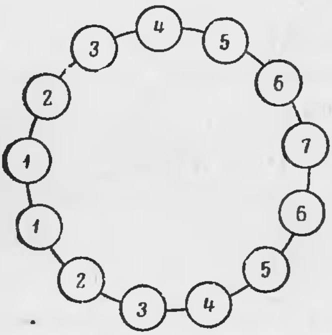


Рис. 235

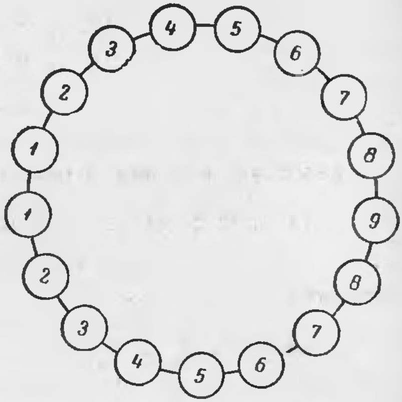


Рис. 236

Приведенную выше проблему можно представить в более общем виде.

Обозначим сумму натурального ряда чисел от 1 до n через S_n; тогда равенство Ямвлиха примет вид:

$$2S_{n-1} + n = n^2.$$

Рассматривая ряд натуральных чисел, заметим, что для $n = 2$ имеем $S_{n-1} < n$, для $n = 3$ имеем $S_{n-1} = n$, для $n > 3$ имеем $S_{n-1} > n$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Если квадрат какого-нибудь целого числа $n > 3$ поделить на сумму всех чисел натурального ряда, взятого до $n-1$ включительно, то в частном получится 2, а в остатке данное число n.

Теперь запишем следующий ряд равенств:

$$\begin{aligned}2S_{n-1}+n &= n^2,\\ 2S_{n-2}+n-1 &= (n-1)^2,\\ 2S_{n-3}+n-2 &= (n-2)^2,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\\ 2S_2+3 &= 3^2,\\ 2S_1+2 &= 2^2,\\ 1 &= 1^2.\end{aligned}$$

Суммируя все эти равенства,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=S_n^{(2)},$$

получим:

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1})+S_n=S_n^{(2)}.$$

Это также можно записать в виде пифагорейского круга:

$$+\begin{matrix}S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1}\\ S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1},\end{matrix}+S_n$$

где сумма всех членов равняется $S_n^{(2)}$.

Возьмем числовой пример для $n=6$:

$$\begin{aligned}&S_1=1,\\ &S_2=1+2=3,\\ &S_3=1+2+3=6,\\ &S_4=1+2+3+4=10,\\ &S_5=1+2+3+4+5=15,\\ &S_6=1+2+3+4+5+6=21.\end{aligned}$$

Подсчитываем:

$$2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + S_6 =$$
$$= 2(1 + 3 + 6 + 10 + 15) + 21 =$$
$$= 2 \cdot 35 + 21 = 91.$$
$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91.$$

6. Другие математические достижения Пифагора

Пифагору приписывается и открытие несоизмеримых отрезков.

Отправным пунктом послужило ему здесь отношение диагонали квадрата к его стороне (рис. 237). Пифагор исходил именно из предположения, что отрезки CB и AB соизмеримы. Это значит, что существует такой общий отрезок, принимаемый за общую меру, который в отрезке AB укладывается a раз, а в отрезке CB помещается b раз. Если будет подобрана наибольшая общая мера отрезков AB и CB, то числа a и b будут простыми относительно себя, то есть не будут иметь никакого общего делителя, кроме единицы.

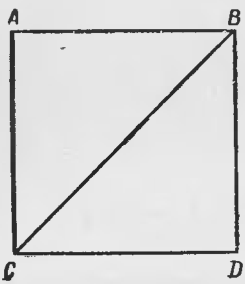


Рис. 237

Между числами a и b возникает следующая зависимость:

$$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Число b^2 должно быть, следовательно, четным числом, поэтому и b будет числом четным, типа $2n$, так как квадрат нечетного числа не может быть числом четным. Таким образом, $(2n)^2 = 2a^2$, отсюда $2n^2 = a^2$.

Из такого предположения вытекает, следовательно, что a^2 и a являются четными числами.

Но a и b — взаимно простые числа, поэтому b должно быть числом нечетным. Таким образом, образуются два исключающих друг друга вывода: b есть одновременно число четное и нечетное. Ошибочным, следовательно, было предположение, что отрезки CB и AB имеют общую меру. Напротив, эти отрезки общей меры не имеют: они несоизмеримы.

Считается также, что Пифагор первым сформулировал положение, что плоскость вокруг точки может быть полностью заполнена лишь тремя видами правильных многоугольников, а именно: равносторонними треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками (рис. 238).

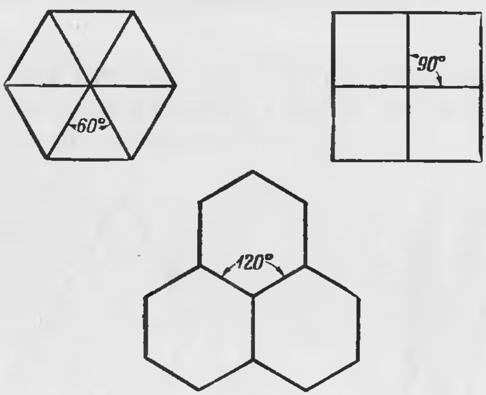


Рис. 238

Пифагору, наконец, должна быть известна очень важная теорема о том, что площади подобных фигур относятся друг к другу, как квадраты соответствующих сторон (рис. 239).

Если эту теорему действительно открыл кротонский мыслитель, то он мог решать и такие задачи, как построение плоских фигур, подобных одной из данных фигур и равных по площади другой из них. Вышеприведенное предположение очень правдоподобно, так как построением фигур, и не только плоских, Пифагор занимался с особенным увлечением.

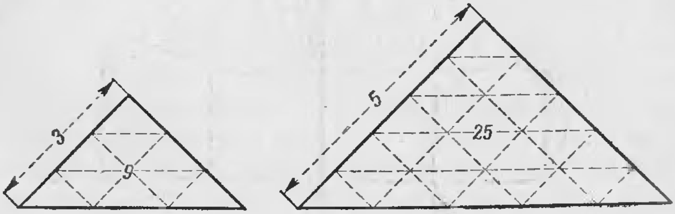


Рис. 239

7. Космические фигуры

Общепризнано, что Пифагор является также творцом элементарных принципов построения правильных многогранников, которые он назвал космическими фигурами.

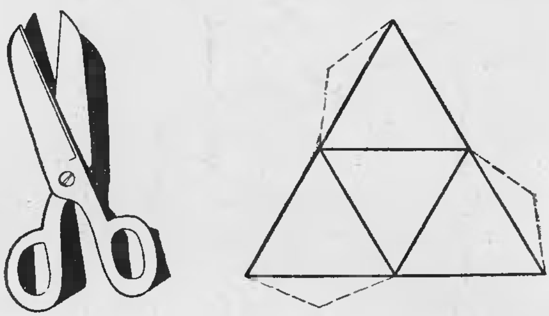


Рис. 240

Чтобы помочь любителям геометрии, которые пожелали бы сделать модели правильных многогранников, приводим ниже схемы соответствующих вырезок из картона: четырехгранника (тетраэдра, рис. 240), шестигранника (гексаэдра, рис. 241), восьмигранника (октаэдра, рис. 242), двенадцатигранника (додекаэдра, рис. 243) и двадцатигранника (икосаэдра, рис. 244).

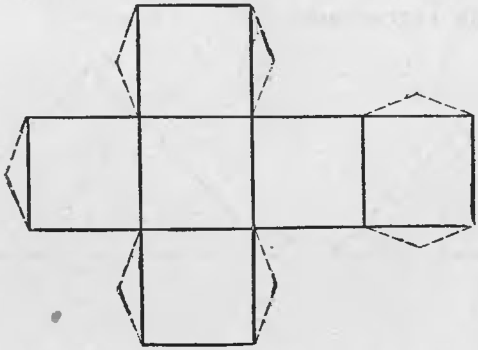


Рис. 241

Мы старались самым тщательным образом собрать все то, что история — а скорее, многовековое предание —

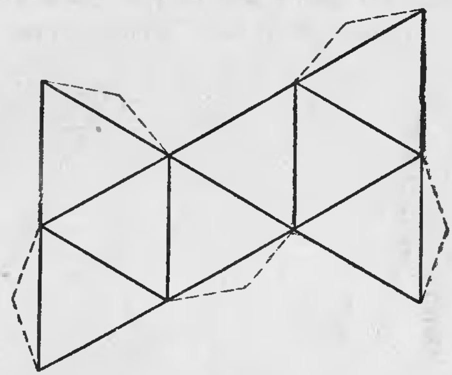


Рис. 242

говорит о вкладе Пифагора в математику. Немного всего этого, очень немного. Чувствуется, однако, что это не все, а только мелкие обломки какого-то труда, огромного по значению и важности.

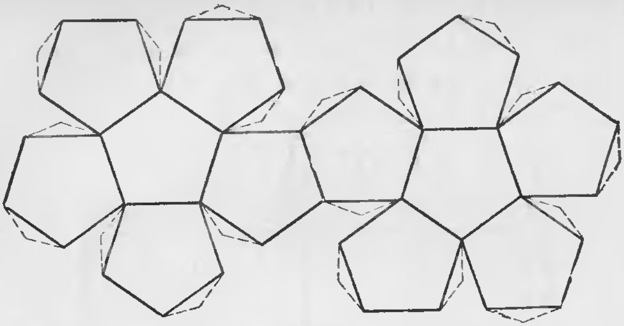


Рис. 243

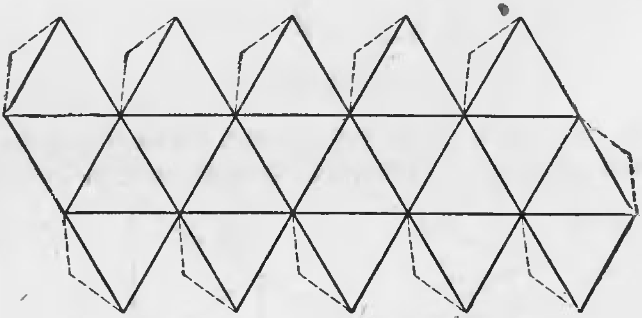


Рис. 244

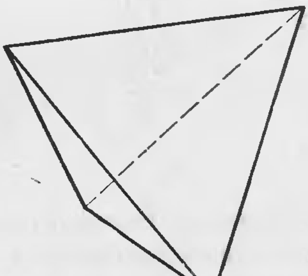


Рис. 245

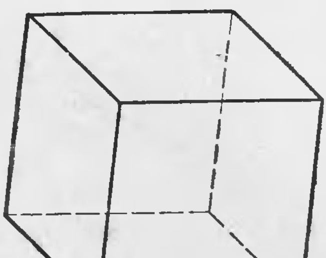


Рис. 246

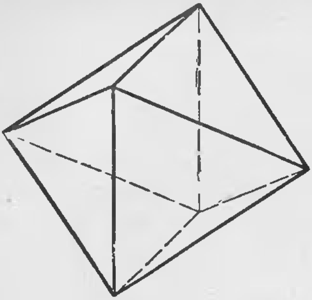


Рис. 247

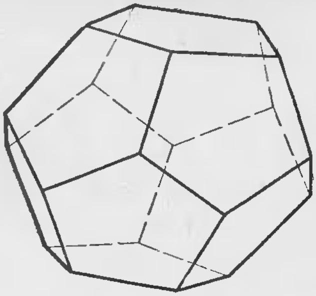


Рис. 248

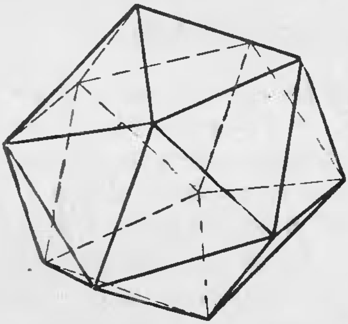


Рис. 249

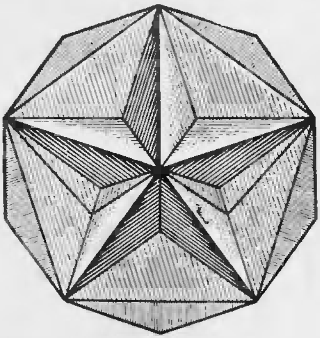


Рис. 250

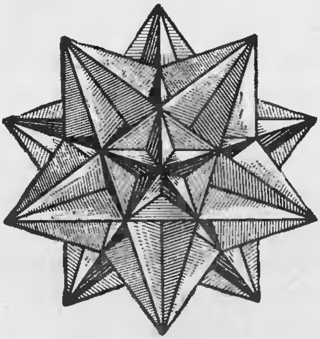


Рис. 251

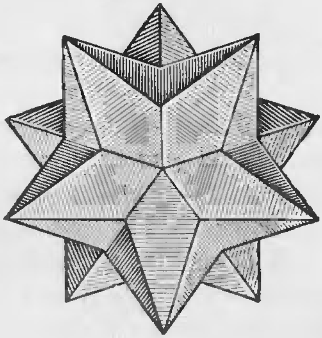


Рис. 252

II. КАЛЕНДАРЬ

1. Где на свете начинается новый год

Что за странный вопрос! Везде начинается: в Азии, Европе, Америке, Австралии, в Пекине, Калькутте, Москве, Варшаве, Париже, Лондоне, Нью-Йорке, Сан-Франциско...

Разумеется, разумеется! Но где на свете начинается новый год? Когда в Варшаве бьет полночь 31 декабря, в Париже будет еще старый год, а в Пекине этот новый год начался уже несколько часов назад.

Новый год пришел к нам с востока, следовательно, где-то там, на востоке, нужно искать место его начала. Без сомнения, это должна быть линия, проходящая через половину земного шара от одного полюса к другому и отделяющая понедельник от воскресенья, среду от вторника, субботу от пятницы...

В самом деле, такая линия, проложенная на волнах морей, существует: она начинается где-то у Берингова пролива, между Камчаткой и самым западным мысом Северной Америки, огибает Японию, вьется между Филиппинскими и Каролинскими островами, охватывает Новую Гвинею, Новую Каледонию и Новую Зеландию и, наконец, пропадает в морях, омывающих Антарктиду.

Из первого путешествия вокруг света Себастьян дель Кано, спутник погибшего Магеллана, вместе с разной заморской добычей привез с собой в Европу еще одно необыкновенное чудо — привез *четверг*, тогда как в Европе уже вступила в свои права *пятница*. А произошло это потому, что тогда линии, отделяющей четверг от пятницы, еще не существовало. Линию эту можно найти, разумеется, только на карте, но человек, пересекающий ее внезапно, так сказать среди бела дня, попадает из четверга в пятницу, или, что еще более странно, из пятницы пятится назад в четверг.

Чтобы разобраться в этом явлении, посмотрим на рисунок 253.

На нем изображена Земля, точнее, ее северное полушарие. Земля вращается с запада на восток (на рисунке — против хода часовой стрелки), а человеку кажется, что Солнце движется с востока на запад.

Поверхность земного шара разделена на 24 пояса, каждый из которых отличается от соседнего на один час. Представим себе, что мы очутились в поясе с меридианом 0°, проходящим через Гринвич, в 10 часов утра, в пятницу, 31 декабря 1948 года. Передвигаясь мысленно на запад, мы будем попадать во все более ранние часы. Например, в долине реки Миссисипи (90° западной долготы) будет 4 часа утра, а на меридиане 150° западной долготы — 0 часов, то есть полночь с четверга на пятницу. Еще западнее от этого меридиана, например на Аляске, царят поздние вечерние часы предыдущего дня — четверга, и, наконец, около меридиана 180° (на востоке от этой линии) будет 22 часа четверга 30 декабря 1948 года.

Если же от меридиана 0° отправиться мысленно в путешествие на восток, все пойдет наоборот. Например, в устье Ганга (90° восточной долготы) наступит уже 16 часов, а на меридиане 180° (с восточной стороны) будет 22 часа пятницы, 31 декабря 1948 года. Именно на меридиане

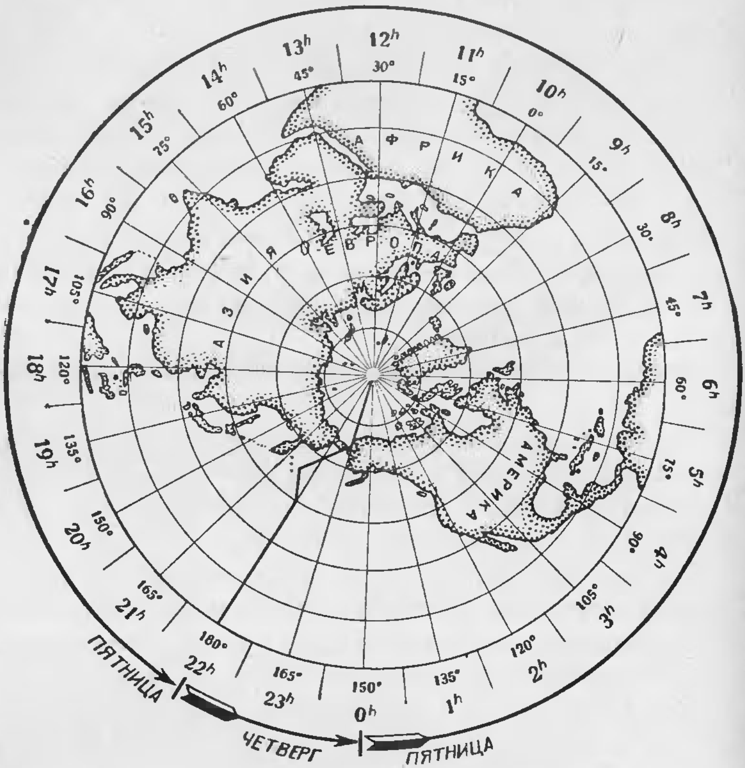


Рис. 253

180° — на демаркационной линии дат — встречаются два разных времени: по западную сторону будет пятница, по восточную — четверг, хотя по обе стороны время одно и то же — в нашем примере 22 часа. Где-то там, далеко, среди волн Тихого океана, совершается это необыкновенное перемещение, настоящий скачок времени. Когда корабль, плывя с запада на восток, пересекает эту необычную линию, следующий день месяца и день недели принимается за предыдущий. Значит, один и тот же день считают два раза подряд. Стало быть, например, на кораблях, плывущих на восток, которые прошли эту границу дат в четверг, 30 декабря, сегодня будет также четверг, 30 декабря.

Поэтому в жизни путешественников эта неделя необычная: *неделя двух четвергов.*

Благодаря такому приему из жизни вычеркивается день, «приобретенный» при передвижении в направлении вращения Земли. И наоборот, когда корабль пересекает границу дат с востока на запад, пропускаются целые сутки; образуется при этом, например, неделя без пятницы или, что еще хуже, без воскресенья.

Если какой-нибудь корабль, двигаясь на запад, переплыл линию в 7 часов утра в воскресенье, 1 июля, то в тот же момент на его палубе наступит уже понедельник, 2 июля с тем же, разумеется, временем — 7 часов. Таким образом, плывя вокруг Земли в направлении, противоположном ее вращению, мы получаем назад этот потерянный день.

Передвинем время на 2 часа вперед (см. рисунок 254). На меридиане 0° тогда будет 12 часов — полдень в пятницу, 31 декабря 1948 года. Передвигаясь на запад, мы пересечем долину Миссисипи в 6 часов утра и достигнем меридиана 180° в 0 часов — в момент рождения пятницы, 31 декабря 1948 года. Если же вместо этого пойти от меридиана 0° на восток, то устье Ганга мы пройдем в 18 часов и достигнем меридиана 180° в 24 часа; одновременно это

Рис. 254

будет 0 часов нарождающейся субботы, 1 января следующего, 1949 года.

Теперь уже нам известно, где, в каком именно месте рождаются на свете все даты, а в числе их и новый год.

Еще раз передвинем стрелки часов на 2 часа вперед (рис. 255). На меридиане 0° сейчас 14 часов пятницы, 31 декабря 1948 года. На запад от меридиана 180° уже

Рис. 255

2 часа живет новый год; там наступила суббота, 1 января 1949 года. Остальная часть мира находится еще в 1948 году. Под 150° восточной долготы — на меридиане, проходящем через Курильские острова, — люди встречают новый год; на меридиане 0° встречать его будут только через 10 часов, а до меридиана 180° новый год доберется

с восточной стороны только через 22 часа. Тогда на западе от демаркационной линии уже кончится день 1 января.

Таким образом, торжественный бой часов оповещает о наступлении нового года первый раз на меридиане 180°, потом новый год, путешествуя на запад, обегает скачками, равными 1 часу, весь земной шар, чтобы через 24 часа добраться до меридиана 180° с востока.

2. Каким днем началась наша эра

Этим вопросом подробно занимался датский астроном Элис Стрёмгеен. Он пришел к убеждению, что первый день января первого года нашей эры был субботой.

Впрочем, вычислить это не слишком трудно. Нужно выбрать себе какое-нибудь число, неделю которого можно легко установить (конечно, легче всего это сделать, взяв текущий день), и высчитать, сколько дней прошло до этого дня от начала текущего столетия.

Необходимо, однако, принять во внимание, что в новой эре были в употреблении два календаря — юлианский и григорианский.

В юлианском календаре, введенном Юлием Цезарем в I веке до нашей эры, три обыкновенных года имеют по 365 дней, а четвертый год, високосный, содержит 366 дней, и, значит, средняя длина юлианского года составляет 365,25 дня. Однако астрономы установили, что длина астрономического года составляет 365,2422 дня. Юлианский год оказался, следовательно, длиннее на 0,0078 дня. В течение 128 лет нарастает 1 день ошибок. Так, например, в 325 году было постановлено, чтобы день весеннего равноденствия отмечался 21 марта. Через 128 лет (то есть в 553 году) день весеннего равноденствия пришелся уже на 20 марта. В течение 128 лет был «потерян» календарный день! Таким образом, до конца XVI века в юлианском календаре затерялось целых 10 дней, и в первый день весны календарь показывал дату 11 марта вместо 21 марта.

Если бы так пошло дальше, то в 10565 году, то есть в CVI веке нашей эры, первый день весны совпал бы с новым годом (1 января).

Чтобы устранить отставание календарного года от астрономического года, папа Григорий XIII произвел в 1582 году реформу календаря, которая основывалась на двух принципах.

1. Чтобы компенсировать 10 утерянных дней, было приказано день после 4 октября считать 15 октября 1582 года. Много людей протестовало против этого, считая, что новый календарь отбирает 10 дней жизни, которые не будут людьми прожиты и, следовательно, пройдут бесследно; по этой причине возникали даже бунты, как, например, «календарный бунт» в Риге.

2. В юлианском календаре каждый год, число которого делится на 4 без остатка, был годом високосным, то есть имел 366 дней. Поэтому високосными были все годы, стоящие на границе столетий, а именно: 1600, 1700, 1800, 1900 и т. д. В реформированном календаре среди четырех очередных таких лет один год должен быть високосным, а три обычными; а именно 1600 год является високосным годом, так же как и в старом календаре, но 1700, 1800, 1900 — годами обыкновенными, затем снова 2000 год должен быть високосным, а годы 2100, 2200, 2300 — обыкновенными, и т. д.

Каждый такой обыкновенный, не високосный, год ускоряет на 1 день отрывание листков календаря (опускается день 29 февраля); в течение четырех столетий новый календарь экономит 3 дня, которые старый календарь потерял.

Реформированный календарь, известный под названием григорианского календаря, в Польше был введен при Стефане Батории уже в 1582 году. Другие страны вводили новый календарь очень медленно, и в употреблении были два счета времени — по старому стилю и по новому стилю. Разнились они в XVI и XVII веках на 10 дней, в XVIII веке — на 11 дней, в XIX веке — на 12 дней, в XX — на 13. Однако постепенно страна за страной вводила новый стиль, и в настоящее время старый стиль уже везде отошел в прошлое.

Возвратимся, однако, к нашей задаче.

За отправной пункт возьмем, например, 1 января 1949 года, субботу. Мы хотим узнать, каким днем недели было 1 января 1-го года нашей эры. Задачу можно несколько облегчить, если принять во внимание, что 1 января 1949 года по новому стилю будет 19 декабря 1948 года по старому стилю. Нужно высчитать, сколько дней прошло согласно юлианскому календарю от первого момента I века до 19 декабря 1948 года. В течение этого времени прошло дней:

$$1948 \cdot 365{,}25 - 13 = 711494$$

Полученное число дней, прошедших от 1 января 1-го года I века, нужно, конечно, разделить на 7 не для того, чтобы получить частное (так как оно покажет только число прошедших недель), а для получения остатка, по которому уже легко установить день недели, каким началась наша эра.

От деления 711 494 : 7 остаток будет равен нулю; это значит, что 1 января 1-го года был тот же самый день недели, что и 19 декабря 1948 года по старому стилю.

3. Вековой календарь

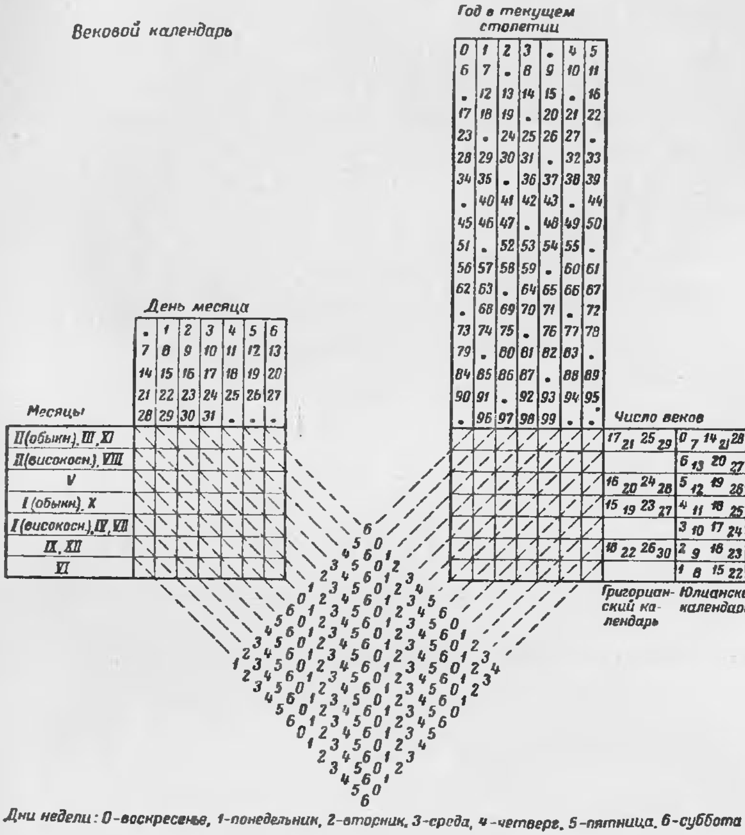


Рис. 256

Составляют так называемые *вековые календари*, по которым без всяких вычислений, приложив только линейку, можно отыскать день недели для любой произвольно взятой даты в прошлом или в будущем. Пользоваться этой таблицей (рис. 256) необычайно просто.

Допустим, что мы захотели вспомнить, в какой день недели было 22 июля 1944 года. В графах под названием «Месяцы» находим в пятой строке VII месяц, а в графах под заглавием «День месяца» во второй колонке находим число 22. На пересечении пятой строки со второй колонкой находим клетку и вдоль проходящей через нее пунктирной линии кладем линейку. Затем, в графах под названием «Число веков» (в рубрике для григорианского календаря) находим 19 (это в четвертом ряду) и в рубриках «Год в текущем столетии» отыскиваем в седьмой колонке число 44. В клетке на пересечении этой колонки с четвертым рядом графы «Число веков» находим пунктирную линию и следуем вдоль нее к уложенной раньше линейке. Окажется, что найденные нами пунктирные линии пересекутся на числе 6. Значит, 22 июля 1944 года было в субботу.

4. Содружественные месяцы

Существуют, как известно, так называемые *содружественные числа*. Поэтому можно по известной аналогии назвать содружественными также некоторые месяцы, а именно апрель и июль, март и ноябрь, сентябрь и декабрь.

Все идущие по порядку числа апреля приходятся на те же самые дни недели, что и соответствующие числа июля. Такая же самая «симпатия» существует между мартом и ноябрем, сентябрем и декабрем. Подобным образом относится и май к январю, но только к январю следующего года. В високосные годы 1 января бывает в тот же самый день недели, что и 1 октября, а 1 февраля, 1 марта и 1 ноября приходятся всегда на одинаковые дни недели.

5. Чем отличался в ряду лет 1890 год

Это был последний год из той серии лет, у которых число сотен равняется числу десятков с единицами. Эта же самая особенность присуща одновременно и половине числа этого года (1890:2=945). Больше уже *никогда* такие цифровые отношения в будущих годах не повторятся, раньше же случалось это много раз. Можем ли мы быть в том уверены? Безусловно! Доказать это предоставляем читателю.

6. Каким будет новый календарь

Люди все еще недовольны календарем. То месяцы неравные от 28 до 31 дня (как тут планировать расходы?), то полугодия неравные: первое полугодие имеет 181 или 182 дня, а второе — 184.

Кроме того, все-таки слишком сложны расчеты, показывающие, на какой день недели приходится та или иная дата. Имеются еще и другие возражения против григорианского календаря. Предлагались различные средства для устранения недостатков этого календаря.

Французская революция ввела новую систему мер, известную под названием метрической, а также новый революционный календарь.

Постановлением Конвента от 24 ноября 1793 года было установлено, что день осеннего равноденствия, который пришелся на следующий день после провозглашения республики, то есть день 22 ноября 1792 года, должен быть признан за первый день 1-го года новой республиканской эры.

Согласно этому календарю год имел 12 месяцев по 30 дней, а оставшиеся 5 или 6 дней каждого года назывались дополнительными днями и были посвящены праздникам республики. В новом календаре месяцы получили поэтические названия, приуроченные к четырем временам года.

Осенние месяцы

вандемьер — месяц сбора винограда
брюмер — » туманов
фример — » инеев

Зимние месяцы

нивоз — месяц снегов
плювиоз — » дождей
вантоз — » ветров

Весенние месяцы

жерминаль — месяц прорастания
флореаль — » цветов
прериаль — » сенокоса

Летние месяцы

мессидор — месяц жатвы
термидор — » зноя
фруктидор — » фруктов

Просим прочесть даты:

9 термидора II,
12 жерминаля III,
18 фрюктидора V,
18 брюмера VIII.

Вот соответствующие даты григорианского календаря: 27 июля 1794 года, 1 апреля 1795 года, 4 сентября 1797 года, 9 ноября 1799 года.

Революционный календарь порвал с традицией 7-дневной недели и ввел в каждом месяце три декады (по 10 дней).

Названия дней декады были весьма прозаические: перводень, втородень, третьедень... Нужно признать, что очень долго длилась декада, пока не истекал девятодень и не наступал праздничный десятодень. Мы же предпочитаем наши субботы и воскресенья!

Республиканский календарь просуществовал до XII года. Отменил его в 1804 году Наполеон. По-видимому, этот календарь не обладал достоинствами метрической системы, которая была создана «на все времена для всех народов».

Существует еще так называемый швейцарский проект календаря, иначе называемый *мировым календарем.*

Год делится на четыре квартала по 13 недель, в каждом квартале первый месяц имеет 31 день, а два остальных месяца — по 30 дней.

Каждый квартал начинается с воскресенья; во всех кварталах дни недели размещаются одинаковым образом, а именно:

1/I — воскресенье
1/II — среда
1/III — пятница
1/IV — воскресенье
1/V — среда
1/VI — пятница
1/VII — воскресенье
1/VIII — среда
1/IX — пятница
1/X — воскресенье
1/XI — среда
1/XII — пятница

Таким образом, праздник 1 Мая приходился бы всегда на среду. «Но хорошо, — спросит читатель, — в четырех кварталах содержится 364 дня, а куда денется триста шестьдесят пятый день?»

Так вот, им должно быть 31 декабря. Этот день будет иметь дату, но не будет «днем недели». Это будет «белый» день между субботой, 30 декабря, и воскресеньем, 1 января.

День этот предназначается на подведение итогов годовой работы, а также и для встречи нового года.

В високосном году будет еще один «белый» день с датой 31 июня. Этот день будет днем Олимпийских игр, которые проводятся раз в четыре года.

Сторонники мирового календаря хотят ввести его в том году, в котором 1 января придется на воскресенье: например, в 1961 году, 1967 году. В этот день мировой календарь совпадет с григорианским. И такая согласованность будет длиться еще до конца февраля по григорианскому календарю, а затем, уже в следующий день после февраля, начнет действовать только один новый, мировой календарь, в котором февраль будет насчитывать 30 дней.

III. ЧИСЛА-ВЕЛИКАНЫ И ЧИСЛА-ЛИЛИПУТЫ

Посмотрите на небо, усеянное звездами, на волнующееся море, на песчинки в пустыне — и в вашем уме родится понятие о числах-великанах, о величинах, не поддающихся подсчету, о бесконечности. Или задумайтесь над размерами уносящейся в ярких лучах солнца пылинки, над толщиной паутинки или над тем, сколько длится одно движение века глаза. И здесь перед вами раскроются горизонты необъятных величин, на этот раз бесконечно малых.

Эти числа-великаны и числа-лилипуты скрываются где-то в безднах бесконечности, так как за каждой величиной — как бы она ни была велика или мала — остается возможность существования еще больших и еще меньших величин.

1. Миллион

Тот, кто уверен, что он прекрасно знает, «что такое миллион», и готов применять эту величину без всякого затруднения к различным явлениям жизни, пусть без долгих рассуждений попробует ответить, какой толщины был бы человеческий волос, увеличенный в миллион раз. Можно ли его будет сравнить со средним стволом сосны или, может быть, с бочкой больших размеров?

Человеческий волос, увеличенный по толщине в миллион раз, будет иметь в поперечнике 70 *м*! Внутри такого «волоса» можно было бы смело ездить по кругу на автомобиле.

Неправдоподобно!

Однако это действительно так. За среднюю толщину человеческого волоса можно принять 0,07 *мм*. Эта величина, помноженная на миллион, даст точно 70 *м*.

А каких размеров достигнет комар — обыкновенный, докучливый комар, — увеличенный в миллион раз? Ответьте без подсчетов, «наугад». После первого примера, несомненно, уже легче будет ориентироваться в размерах этого миллионизированного маленького насекомого, а все-таки для многих, наверное, покажется неправдоподобным, когда они услышат, что комар будет иметь в длину 5 *км*!

Коротенькое умножение подтвердит этот внешне парадоксальный факт:

$$5\ \text{мм} \cdot 1\,000\,000 = 5\,000\,000\ \text{мм} = 5\ \text{км}.$$

Одно изумление сменяется другим, когда производим различные сопоставления мелких предметов, увеличенных в миллион раз. Обычные карманные часы в этом масштабе достигнут 50 *км* в диаметре, рост человека — 1700 *км*. Миллион людей, уставленных в один ряд плечом к плечу, займут 500 *км*. Миллион типографских точек не уместился бы на бумажной полосе длиной 800 *м*. Эта книжка не содержит миллиона букв. Книжка в миллион страниц имела бы толщину 50 *м*. От начала нашей эры до настоящего времени не прошел еще миллион дней; произойдет это только примерно через 800 лет.

Таких сопоставлений можно было бы привести миллион. Но и приведенных безусловно хватит, чтобы убедить всех, что даже миллиона-то мы как следует себе не представляем. А что сказать о числах несравненно бо́льших!

2. Миллиардно-биллионная неразбериха

На всяких денежных документах — билетах, переводах, чеках, векселях — существует графа, требующая, чтобы сумма была написана прописью. В случае какого-нибудь недоразумения это словесное выражение денежной суммы является решающим. Какие споры, однако, возникали бы, если бы в банковских оборотах оперировали суммами, исчисляющимися биллионами. Тогда в случае неправильности цифрового выражения денежной суммы словесные выражения не были бы достаточным основанием для расчетов.

Приведенный ниже анекдот является превосходной иллюстрацией к этому.

Когда после несчастной для Франции франко-прусской войны (1870—1871 годы) было установлено, что Франция должна заплатить победителю — Германии — огромную для того времени контрибуцию, составлявшую 5 биллионов франков, многие французы пришли в настоящее отчаяние. Совершенно справедливо они видели в этом полное разрушение хозяйства страны, так как во многих странах биллион равняется миллиону миллионов, то есть единице с 12 нулями (10^{12}). Поэтому наступило большое облегчение и даже «радость», когда сумма была выражена цифрами и убедились, что речь идет «только» о 5 000 000 000, то есть о 5 тысячах миллионов (10^9).

В Германии, Англии и некоторых других странах Северной Европы за основание счета приняты шестизначные классы; это значит, что

$$\text{миллион} = 1\,000\,000 = 10^6,$$
$$\text{биллион} = 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12},$$
$$\text{триллион} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}.$$

В Америке, Франции и странах Южной Европы основанием счета являются трехзначные классы, то есть:

$$
\begin{aligned}
\text{тысяча} &= 1000 &&= 10^3,\\
\text{миллион} &= 1\,000\,000 &&= 10^6,\\
\text{биллион} &= 1\,000\,000\,000 &&= 10^9,\\
\text{триллион} &= 1\,000\,000\,000\,000 &&= 10^{12},\\
\text{квадриллион} &= 1\,000\,000\,000\,000\,000 &&= 10^{15},\\
\text{квинтиллион} &= 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 &&= 10^{18}.
\end{aligned}
$$

Из этого сопоставления видно, что биллион немецкий $= 10^{12} =$ триллиону французскому, триллион немецкий $= 10^{18} =$ квинтиллиону французскому.

3. Биллионы, триллионы и другие ...ллионы

Одна дама в разговоре о том, на каком расстоянии находится Земля от Солнца, утверждала: ей хорошо известно, что Солнце от нас находится «на какие-то там миллионы или биллионы километров». «Какие-то миллионы или биллионы»! Следует признать, что даже многие образованные люди ясно не отличают миллион от биллиона, и уж тем более биллион от триллиона.

Как удивились бы эти люди, если бы узнали, что миллион секунд протекает меньше чем в 2 недели, а биллион секунд (биллион $= 10^{12}$) длится свыше 3000 лет! С начала нашей эры прошел только первый миллиард минут. А миллиард меньше биллиона в тысячу раз!

Человеческий волос, увеличенный в биллион раз (10^{12}), был бы в 8 раз толще... земного шара, а «сбиллионизированный» комар был бы почти в 50 раз больше действительных размеров Солнца...

Кто хочет узнать название дальнейших числовых групп, пусть бросит взгляд на приведенную ниже табличку:

секстиллион $= 10^{36}$

септиллион $= 10^{42}$

октиллион $= 10^{48}$

нониллион $= 10^{54}$

дециллион $= 10^{60}$

. . . .

. . . .

центезиллион $= 10^{600}$

Масса всех известных сейчас тел Вселенной составляет немногим более 20 нониллионов граммов. Мысль теряется в безбрежности этих чисел-великанов, но однако... сердце человека в течение его короткой жизни бьется без устали, без остановки целые миллиарды, многие миллиарды раз!

4. Вокруг света

Никто не упрекнет нас в преувеличении, если скажем, что каждый ребенок начиная с 3—4 лет находится ежедневно в движении, по крайней мере, 5 часов. В течение одного часа не торопясь можно пройти 4 *км*. Каждый ребенок, следовательно, делает в день самое меньшее 20 *км*. За год это составит $360 \cdot 20 = 7200$ *км*.

Экватор земного шара насчитывает круглым числом 40 000 *км*. Из этого легко сделать вывод, что каждый ребенок за 5 лет и несколько месяцев как бы совершает путешествие вокруг света.

Приведенное выше вычисление было, конечно, слишком осторожным. Можно поэтому принять, что всякий здоровый человек проходит за год указанные 7200 *км*. Значит, 60-летний человек имеет за своими плечами пройденный путь, равный расстоянию от Земли до Луны: 384 000 *км*.

Сколько же раз за свою жизнь пахарь обойдет вокруг света (рис. 257)?

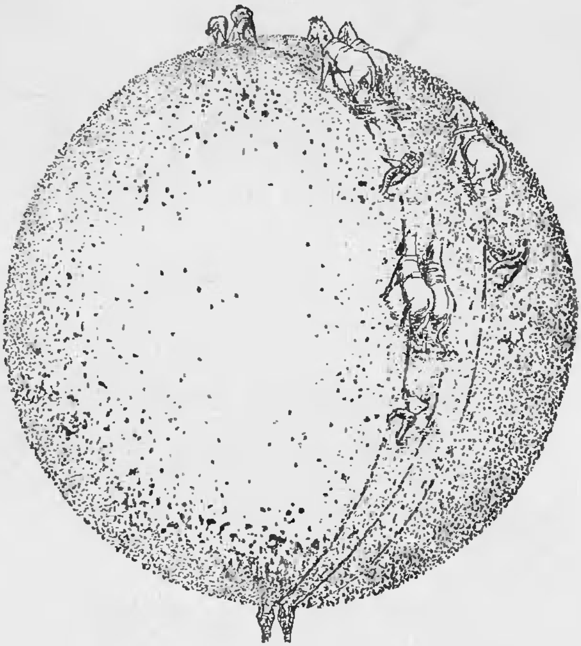


Рис. 257

5. Путешествия в лифте на Луну

Кто-то установил, что лифтер в небоскребе за 15 лет проезжает в лифте расстояние от Земли до Луны. Не удивит это того, кто, живя только на втором этаже, ведет несложный подсчет проходимых им за год по лестнице вверх ступенек или метров.

Предположим, что на второй этаж ведет 40 ступенек, по которым обитатель этого этажа поднимается в среднем 3 раза в день. Дополнительно к этому прибавим еще один этаж, который в среднем приходится проходить в день на работе, при посещении знакомых и так далее, получим ежедневную «порцию» в сумме 140 ступенек. За год это составит свыше 50 000 ступенек. В течение 40 лет обитатель второго этажа пройдет свыше 2 000 000 ступенек, что составит приблизительно 300 *км*. Теперь подумайте: на сколько километров поднимутся вверх за свою трудовую жизнь почтальоны, разносчики газет и люди других подобных профессий?

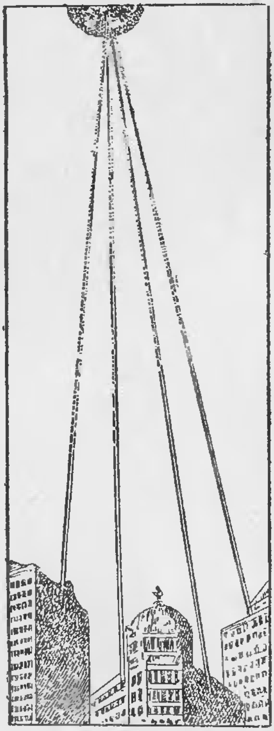


Рис. 258

6. Числа-лилипуты и числа-великаны

От чисел очень больших перейдем к числам очень малым. Легко убедиться в том, что этих чисел мы тоже почти не знаем и ориентируемся в их взаимных отношениях так же неточно, как и в числах-великанах.

Возьмем для примера $\frac{1}{1000}$ секунды. Смешная доля времени, не правда ли? Что может случиться в 0,001 секунды?

Поезд, идущий с очень небольшой скоростью, 36 *км* в час, пройдет за 0,001 секунды 1 *см* пути, самолет же за 0,001 секунды продвинется на 10 *см*. Звук за это время пробегает 33 *см*, пуля — 70 *см*. Земля в 0,001 секунды проходит 30 *м*. Молния длится часто гораздо меньше 0,001 секунды, но проходит за это время часто целые километры.

Эта до смешного маленькая доза времени теперь представляется нам уже гораздо менее смешной, почти осязаемой. Пойдемте тогда дальше в глубины все более и более меньших чисел.

В $\frac{1}{1\,000\,000}$ секунды свет пробегает 800 *м*. На одну световую волну приходится $\frac{1}{400\,000\,000\,000\,000}$ секунды! Однако этот отрезок времени выглядит «солидным» в сравнении с частотой волн лучей Рентгена, которая выражается числом 25 000 биллионов колебаний в секунду.

Мы знаем уже, во что перевоплотились бы разные предметы, увеличенные в миллион раз. Человеческий волос достиг бы 70 *м* толщины, комар — 5 *км* в длину, мышь имела бы 100 *км* в длину, рост человека доходил бы до 1700 *км*, знаменитая Эйфелева башня почти достала бы до Луны. А во что превратился бы атом, увеличенный в миллион раз? В маленькую точечку, немного меньше той, которой заканчивается это предложение. Атом же — это целая солнечная система, в которой вращаются электроны. Если сравнить их размеры с величиной пылинки, то можно сказать, что электрон так относится к пылинке, как пылинка к земному шару!

Несмотря на все это, числа-великаны и числа-лилипуты, которые мы рассматривали выше, поистине будут ничем в сравнении со знаменитым числом, написанным всего тремя цифрами, и тем более с частью единицы, которая получится от деления единицы на это число.

Вот эти числовые сверхколосс и сверхлилипут:

$$9^{9^9} \quad \text{и} \quad \frac{1}{9^{9^9}}.$$

IV. ИНТЕРЕСНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

1. Многоугольные числа

А. Числа треугольные. Рассмотрим прилагаемый здесь рисунок или, еще лучше, разложим на столе некоторое число равных по величине монет. Составляя из них треугольники, убедимся, что число монет, необходимых для

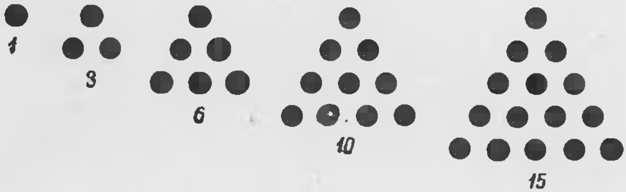


Рис. 259

образования все больших треугольников, подчиняется каким-то постоянным правилам. Такие числа мы назовем треугольными числами (рис. 259).

Вот способ их получения (исключая, конечно, способ наглядный, экспериментальный).

Напишем ряд единиц, а под ними натуральный ряд чисел. Тогда можно будет сказать, что каждое число этого второго ряда образовано посредством сложения числа, стоящего непосредственно перед данным числом, с числом, находящимся над ним, то есть

$$2=1+1, \quad 3=2+1, \quad 4=3+1, \text{ и т. д.}$$

Если теперь под первой единицей второго ряда подписать единицу, образуя таким образом третий ряд, и применить тот же самый принцип образования последующих чисел, то в результате получится ряд треугольных чисел:

(1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
(2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Треугольные числа	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...

Как, построив такой ряд, найти в нем треугольное число, стоящее на n-м месте?

Поставим рядом друг с другом, как это показано на рисунке 260, два треугольника, занимающие пятое место в ряду; получим тогда параллелограмм, у которого одна сторона равна 5, а вторая $5+1$; вместе, следовательно, параллелограмм охватывает $5 \cdot 6 = 30$ единиц. Половина этого числа даст искомое треугольное число.

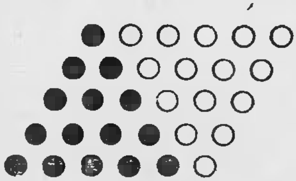


Рис. 260

Обобщая этот пример, можно сказать, что треугольное число S, стоящее на n-м месте, равняется:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Треугольное число равняется половине произведения числа, означающего его место в ряду, на следующее за ним число.

Из этого вытекает одно интересное наблюдение. *Каждый квадрат члена натурального ряда равен сумме двух соседних треугольных чисел*, а именно, сумме треугольного числа, стоящего непосредственно под данным числом натурального ряда, и треугольного числа, стоящего на одно место влево от первого треугольного числа:

$$2^2=3+1,\quad 3^2=6+3,\quad 4^2=10+6, \text{ и т. д.}$$

Б. Квадратные числа. Они образуются таким же способом, что и треугольные, с той только разницей, что теперь вместо ряда единиц мы будем писать ряд двоек

Рис. 261

А во втором ряду, начинающемся единицей, напишем ряд нечетных чисел; в третьем ряду посредством такого же суммирования чисел получим ряд квадратных чисел (рис. 261).

(1)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	...
(2)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
Квадратные числа	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	...

Квадратные числа будут, разумеется, квадратами последовательных чисел натурального ряда. Отсюда также вытекает известное уже нам положение, что *сумма* *последовательных нечетных чисел равняется квадрату их числа.*

На рисунке 262 представлено графическое выражение знаменитой теоремы Диофанта о том, что *треугольное число, взятое восемь раз и увеличенное на единицу, является всегда квадратом.*

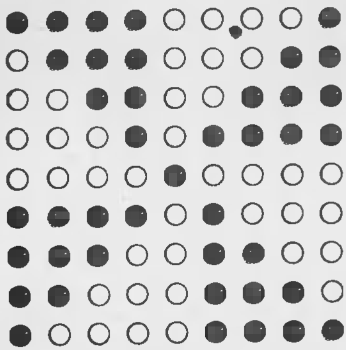


Рис. 262

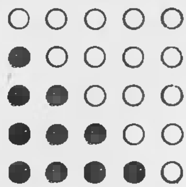


Рис. 263

Чтобы проверить, будет ли данное число n треугольным, достаточно узнать, является ли число $8n + 1$ полным квадратом; например,

$$8 \cdot 66 + 1 = 529 = 23^2,$$

значит, 66 — число треугольное.

Другая теорема гласит, что *каждое квадратное число равняется сумме занимающего такое же место треугольного числа и треугольного числа, стоящего перед ним* (рис. 263).

Натуральный ряд . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
Треугольные числа . . .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78...
Квадратные числа . . .	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144...

И, наконец, третья теорема звучит так: *каждое квадратное число равняется порядковому номеру места, которое оно занимает, увеличенному на удвоенное треугольное число, занимающее предыдущее место* (рис. 264).

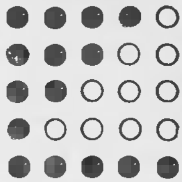


Рис. 264

В. Пятиугольные числа. И эти многоугольные числа получаются совершенно тем же путем, что и предыдущие, только в первом ряду пишутся тройки, а не единицы или двойки, как это было раньше (рис. 265):

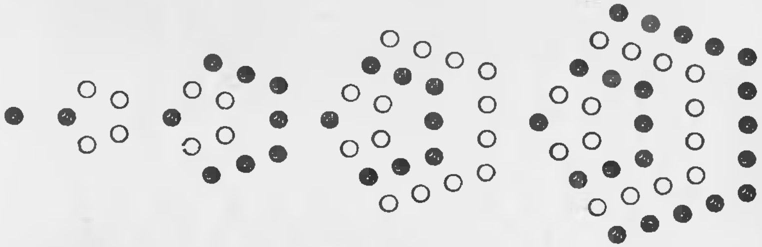


Рис. 265

(1)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3...
(2)	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34...
Пятиугольные числа. . .	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210...

Эти числа дали повод для сформулирования нескольких довольно интересных утверждений.

1. *Пятиугольное число равняется числу места, которое оно занимает, увеличенному на утроенное треугольное число, занимающее предыдущее место* (рис. 266).

2. *Пятиугольное число является суммой треугольного числа того же самого места и удвоенного треугольного числа, стоящего на предыдущем месте.*

3. *Утроенное пятиугольное число равняется треугольному числу.*

Чтобы проверить, является ли данное число, например 22, пятиугольным, достаточно умножить его на 3 и отыскать полученное произведение в ряду треугольных чисел (рис. 267). Из третьего утверждения легко вывести, что пятиугольное число не может оканчиваться на 3, 4, 8, 9, так как при утроении в единицах произведения получилось бы 9, 2, 4, 7, а этих цифр на конце треугольных чисел мы не находим.

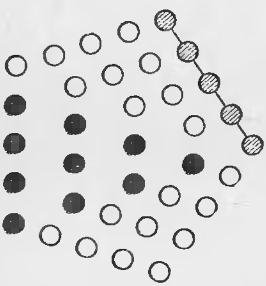


Рис. 266

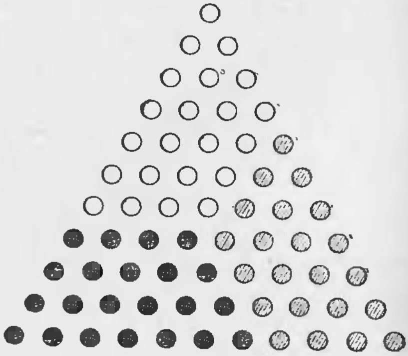


Рис. 267

4. *Пятиугольное число равняется квадрату своего порядкового номера, увеличенному на сумму чисел всех предыдущих мест, или, короче, пятиугольное число равняется квадрату своего порядкового номера плюс треугольное число, стоящее на предыдущем месте.*

Например, девятое место занимает пятиугольное число 117; значит,

$$117=9^2+1+2+3+4+5+6+7+8,$$

но сумма первых восьми чисел натурального ряда составляет 36, а это будет треугольное число, занимающее восьмое место. Значит,

$$117=9^2+36.$$

Пятиугольные числа можно образовать с помощью следующей таблицы (рис. 268):

1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

Рис. 268

$$1 + 2 \cdot 2 = 5$$
$$1 + 2 + 3 \cdot 3 = 12$$
$$1 + 2 + 3 + 4 \cdot 4 = 22$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdot 5 = 35$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \cdot 6 = 51$$

и так далее.

В общем:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n^2 = \text{пятиугольное число.}$$

Г. Шестиугольные числа получаются аналогичным образом, только за основание принимается число 4.

(1)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4...
(2)	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45...
Шестиугольные числа	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276...

1. *Шестиугольное число равняется своему порядковому номеру, увеличенному на четырехкратное треугольное число, стоящее на предыдущем месте* (рис. 269, 270).

2. *Шестиугольное число составляется из треугольного числа с тем же порядковым номером и утроенного треугольного числа.*

3. *Шестиугольные числа равны треугольным числам, занимающим нечетные места.*

Д. Обобщение. На основе вышеприведенных положений можно установить как общий способ образования мно-

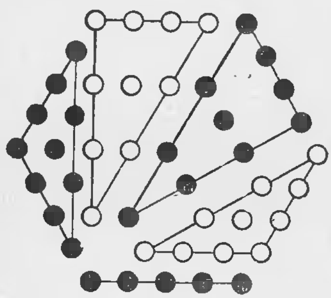


Рис. 269

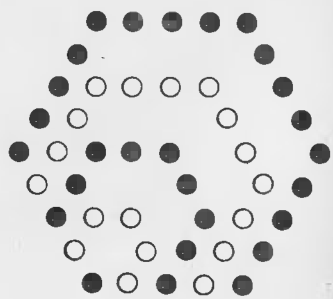


Рис. 270

гоугольных чисел порядка k, так и основные положения об отношении этих чисел к числам треугольным, а именно: ряд многоугольных чисел порядка k образуется при помощи вышеуказанного суммирования чисел, причем за основу принимается ряд одинаковых чисел, равных $k - 2$.

Утверждение I. *Каждое многоугольное число порядка* k *равняется своему порядковому номеру плюс треугольное число, стоящее на предыдущем месте, взятое* $(k-2)$ раз.

Утверждение II. *Каждое многоугольное число порядка* k *равняется треугольному числу, стоящему на том же месте, плюс треугольное число, стоящее на предыдущем месте, взятое* $(k - 3)$ раз.

Таблица многоугольных чисел

Место	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Треугольные числа	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Квадратные числа	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Пятиугольные числа	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Шестиугольные числа	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Семиугольные числа	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Восьмиугольные числа	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Девятиугольные числа	1	9	24	46	75	111	164	204	261	325
Десятиугольные числа	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Рис. 271

2. Пирамидальные числа

Представим себе, что из 10 стеклянных шариков сложен треугольник. На этих шариках можно, в свою очередь, уложить второй слой из шести шариков, затем третий слой — треугольник из трех шариков, и, наконец, последним, четвертым, слоем ляжет один щарик. Образуется пирамида с треугольными гранями и основанием (рис. 272). Сторона основания будет равняться четырем шарикам, каждое из сходящихся в вершине ее ребер будет равно также четырем шарикам. Подобную пирамиду можно построить на любом треугольнике, составленном из треугольного числа шариков. Полученный таким образом новый ряд чисел, нуж-

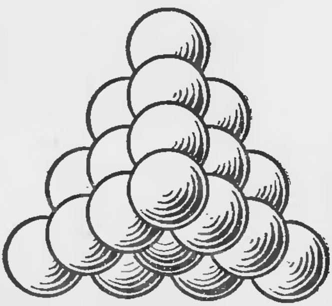


Рис. 272

ных для образования этого рода пирамид, называется рядом *пирамидальных треугольных чисел.*

Получаются они из суммирований, аналогичных тем, которые мы применяли при нахождении многоугольных чисел:

Натуральный ряд . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
Треугольные числа . . .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55...
Пирамидальные треугольные числа . . .	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220...

При внимательном рассмотрении этой таблицы можно вывести следующее утверждение, полезное при образовании пирамидальных треугольных чисел, а именно: *шестикратно взятое пирамидальное треугольное число равняется произведению трех последовательных чисел, первое из которых обозначает место данного числа в ряду пирамидальных треугольных чисел.*

Например,

$$6 \cdot 10=3 \cdot 4 \cdot 5; \; 6 \cdot 35=5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Итак, пирамидальное треугольное число, стоящее на n-м месте, равняется:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Пирамиды, подобные описанной выше, можно строить не только на треугольном основании, но и на квадрате, пятиугольнике и т. д.

Таким образом получаются пирамидальные числа квадратные, пятиугольные и т. д.

Квадратные пирамидальные числа можно найти при помощи следующих положений, которые нетрудно также обобщить для всех иных пирамидальных чисел.

1. *Квадратное пирамидальное число равняется треугольному пирамидальному числу, занимающему такое же самое место в ряду чисел и увеличенному на треугольное пирамидальное число, занимающее предыдущее место.*

2. Из сказанного выше легко выводится следующее равенство. *Квадратное пирамидальное число, стоящее на n-м месте*, равняется:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

В общем виде: *пирамидальное число порядка k равняется треугольному пирамидальному числу, стоящему на том же месте, плюс треугольное пирамидальное число, занимающее предыдущее место*, взятое $(k-3)$ раз.

3. Совершенные числа

Совершенными числами пифагорейцы называли такие числа, в которых сумма делителей (без данного числа, конечно) равняется самому числу. Например,

$$6=1+2+3;\quad 28=1+2+4+7+14.$$

Чтобы узнать, является ли данное число совершенным, необходимо найти простые числа, из которых составляются его делители, затем сумму различных степеней этих чисел перемножить и от произведения отнять исследуемое нами число. Если разность получится большей данного числа, то число будет *избыточным*, если меньшей — то *недостаточным*, если же разность будет равна данному числу, то оно является *совершенным*.

Лучше всего это пояснят примеры. Число 72 является произведением $8 \cdot 9$. Простыми числами среди его делителей будут 2 и 3; суммы их степеней $1+2+2^2+2^3$ и $1+3+3^2$ дают в произведении $15 \cdot 13=195$. Отнимая 72 от 195, получаем разность, равную 123, а так как $123>72$, то число 72 является избыточным числом.

Исследуем число 147. Разложение его на простые множители дает $147=3 \cdot 7^2$, высчитываем $(1+3) \cdot (1+7+7^2)=4 \cdot 57=228$. Производим вычитание $228-147=81$, и поскольку $81<147$, то 81 будет, следовательно, недостаточным числом.

Наконец, число 496 является совершенным числом, так как $496=2^4 \cdot 31$; $(1+2+4+8+16) \cdot (1+31)=31 \cdot 32=992$, и получаем $992-496=496$.

Уже Евклид около 300 года до н. э. занимался проблемой совершенных чисел. И с того времени дело ненамного продвинулось вперед, хотя совершенным числам много внимания уделяли такие превосходные математики, как Декарт и Эйлер.

Теория нечетных совершенных чисел до сих пор недостаточно разработана. А четные совершенные числа могут быть выражены формулой, известной уже со времен Евклида:

$$N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1),$$

где $(2^p - 1)$ должно быть простым числом. Но $2^p - 1$ может быть простым числом только тогда, когда p также представляет собой простое число.

В первой рубрике таблицы (рис. 273) совершенных чисел нет трех промежуточных значений p, а именно 11, 23, 29, так как соответствующие им числа $(2^{11} - 1)$, $(2^{22} - 1)$, $(2^{29} - 1)$ не являются простыми, поскольку делятся на 23, 47, 233.

Нетрудно заметить, что все приведенные выше совершенные числа оканчиваются на 6 или 8; можно доказать, что так оканчиваться будут все числа этого типа.

p	2^{p-1}	2^p-1	Совершенные числа
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8 128
13	4 096	8 191	33 550 336
17	65 536	131 071	8 589 869 656
19	262 144	524 287	137 438 691 328
31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Рис. 273

Если бы кто-нибудь поручил нам найти совершенное число, которое было бы многократным 16, мы легко могли бы сделать это при помощи таблицы (рис. 273), но и без нее можно довольно просто найти решение такой задачи.

Обозначим искомое число через $16x$, тогда

$$16x = 1+2+4+8+16 + x + 2x + 4x + 8x,$$

отсюда $x = 31$, а искомое совершенное число будет 496.

Совершенными, только в другом роде, некоторые греческие математики называли числа, равные произведению их делителей; например:

$$8=1 \cdot 2 \cdot 4;\ 10=1 \cdot 2 \cdot 5;\ 14=1 \cdot 2 \cdot 7.$$

Число 6 является самым совершенным числом, так как оно обладает обоими видами совершенности:

$$6=1+2+3 \text{ и } 6=1 \cdot 2 \cdot 3.$$

4. Содружественные числа

Когда Пифагора спросили: «Что такое друг?», он ответил: «Друг — это второе я, дружба — это отношение чисел 220 и 284». Вероятно, отсюда происходит это необычное название чисел — *содружественные*. Но в чем же, собственно говоря, состоит такая числовая «дружба»?

Два числа A и B называются содружественными, если сумма делителей числа A равняется числу B и, наоборот, сумма делителей числа B равняется числу A. При этом, конечно, сами эти числа как делители во внимание не принимаются.

Такими «числами-друзьями» являются, как показал Пифагор, 220 и 284. Действительно,

$$220=1+2+4+71+142,$$

а значит, 220 — это сумма делителей числа 284. В то же время

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110,$$

и, значит, 284 будет суммой делителей числа 220.

Общие формулы для нахождения содружественных чисел имеют вид:

$$A = 2^n a; \; B = 2^n \cdot b \cdot c,$$

где a, b и c — простые числа такого вида:

$$a = (2^k + 1)^2 \cdot 2^{2n-k} - 1; \; b = 2^n - 1 + 2^{n-k};$$
$$c = 2^n - 1 + 2^{n-k}.$$

Принимая $k = 1$, получаем первый ряд таких чисел:

$$a = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1;\ b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1;\ c = 3 \cdot 2^n - 1.$$

Для содружественных чисел, так же как и для совершенных, можно составить таблицу, точнее, ряд таблиц для разных значений k. При $k = 1$ получаем (рис. 274):

n	a	b	c	A	B
2	71	5	11	284	220
4	1 151	23	47	18 416	17 296
7	73 727	191	383	9 437 056	9 363 584

Рис. 274

Кроме этой таблицы, составление которой (особенно для $k = 5, 7, 9,\ldots$) довольно сложное дело, приводим еще несколько пар содружественных чисел:

2620	5020	6232	10744	17296	63020	66928
2924	5564	6368	10856	18416	76084	66992

5. Интересные случаи разложения кубов

Кубы чисел натурального ряда можно представить как суммы очень интересных прогрессий:

$$1 = 1^3 = 1$$
$$2 + 6 = 2^3 = 3 + 5$$
$$3 + 9 + 15 = 3^3 = 6 + 9 + 12$$
$$4 + 12 + 20 + 28 = 4^3 = 10 + 14 + 18 + 22$$
$$5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 5^3 = 15 + 20 + 25 + 30 + 35$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Первые члены прогрессий, стоящих по левую сторону, составляют натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5,...; первые члены прогрессий, находящихся в правой стороне:

1, 3, 6, 10, 15,... — треугольные числа. Последние числа прогрессий с левой стороны составляют ряд шестиугольных чисел; последние же числа прогрессий с правой стороны будут пятиугольными числами. Разности прогрессий по правой стороне, начиная со второй строки, составляют ряд последовательных натуральных чисел: 2, 3, 4, 5,...

В то же время разности прогрессий, находящихся на левой стороне, в два раза больше, чем соответствующие разности прогрессий, стоящих по правую сторону.

6. Тайны круговых чисел

Эти числа обладают рядом таинственных свойств. Прежде всего их главная особенность состоит в так называемой *кругообразности*. Заключается она в том, что, например, число 142 857, умноженное на 2, 3, 4, 5, 6 (но не на 7), дает произведение, которое слагается из тех же самых цифр, но поставленных в другом порядке, при сохранении, однако, цикличной очередности их следования. Итак,

$$2 \cdot 142\ 857 = 285\ 714;$$
$$3 \cdot 142\ 857 = 428\ 571;$$
$$4 \cdot 142\ 857 = 571\ 428.$$

Нитью, которая может привести к разгадке тайны круговых чисел, является совершенно исключительное произведение $7 \cdot 142\ 857$, равное 999 999.

Отсюда легко сделать вывод, что число 142 857 представляет собой период дроби $\frac{1}{7}$ при превращении ее в десятичную дробь. Все свойства числа 142 857 мы найдем в каждом числе, составляющем период дроби типа $\frac{1}{p}$, если этот период имеет $(p - 1)$ цифр, а p будет простым числом.

Круговое число дает, например, дробь:

$$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647).$$

Действительно, если период этой дроби обозначить через ω, то получится такая таблица:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \omega &= 0588235294117647\\
2 \cdot \omega &= 1176470588235294\\
3 \cdot \omega &= 1764705882352941\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
15 \cdot \omega &= 8823529411764705\\
16 \cdot \omega &= 9411764705882352\\
17 \cdot \omega &= 9999999999999999
\end{aligned}
$$

Этими же самыми свойствами обладает также в своем развернутом виде период дроби

$$\frac{1}{29} = 0,(0344827586206896551724137931).$$

Но рекордное число десятичных знаков дает знаменатель 1913 (это простое число). Период дроби с этим знаменателем будет круговым числом с 1912 цифрами. Итак,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1913} &= 0,(0005227391531\ldots9012023)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\frac{1912}{1913} &= 0,(9994772608468\ldots0987976).
\end{aligned}
$$

Кто не верит, пусть проверит!

Можно доказать, что каждая простая дробь типа $\frac{1}{p}$, где p — простое число, дает при превращении ее в десятичную дробь период с числом цифр, которое будет делителем числа $(p - 1)$.

При делении остаток должен быть, конечно, всегда меньше делителя, поэтому при делении для получения десятичной дроби единицы на p разных остатков может быть максимум $p-1$, после чего они начнут повторяться. Так, например, для дроби $\frac{1}{7}$ получаем последовательно:

$$\frac{1}{7}=0{,}1\,\frac{3}{7}=0{,}14\,\frac{2}{7}=0{,}142\,\frac{6}{7}=0{,}1428\,\frac{4}{7}=0{,}14285\,\frac{5}{7}=0{,}142857\,\frac{1}{7},$$

и от этого момента числители начнут повторяться.

Отсюда ясно также, что если 142 857 мы будем поочередно умножать на 3, 2, 6, 4, 5, то в произведении будут получаться периоды, начинающиеся соответственно после первой, второй, третьей, четвертой и пятой цифры. Если период, полученный при обращении дроби $\frac{1}{p}$ (где p — простое число) в десятичную дробь, насчитывает $\frac{p-1}{2}$ цифр, то тогда мы будем иметь дело с другим типом круговых чисел. Умножая этот период на числа от 1 до $p-1$, получим две группы круговых чисел.

Лучше всего это видно на примере:

$$\frac{1}{13}=0{,}(076923).$$

Умножая период $\omega = 076923$ на числа $1, 2, \ldots, 12$, получим циклические многократные числа:

$$\begin{array}{rlrl}
1\cdot\omega = & 076923 & 2\cdot\omega = & 153846\\
3\cdot\omega = & 230769 & 5\cdot\omega = & 384615\\
4\cdot\omega = & 307692 & 6\cdot\omega = & 461538\\
9\cdot\omega = & 692307 & 7\cdot\omega = & 538461\\
10\cdot\omega = & 769230 & 8\cdot\omega = & 615384\\
12\cdot\omega = & 923076 & 11\cdot\omega = & 846153
\end{array}$$

Возвратимся теперь к числу 142 857, чтобы отметить еще одно его свойство, ранее не замеченное нами.

Две половины числа 142 857 дают в сумме $142+$ $+857=999$.

То же самое происходит с каждым круговым числом, если его разделить пополам; так что для периода 0588235294117647, который получается при преобразовании дроби $\frac{1}{17}$ в десятичную, получится:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 05882352 \\ 94117647 \end{array} \\ \hline 99999999 \end{array}$$

Это же относится и к круговым числам второго типа, но не всегда. Для периода 076923, получаемого при преобразовании дроби $\frac{1}{13}$, мы, правда, имеем $076+923=999$, но к периоду дроби

$$\frac{1}{31}=0,(032258064516129)$$

применить это уже нельзя.

Основываясь на вышеприведенных рассуждениях, можно значительно облегчить превращение простой дроби типа $\frac{1}{p}$ (где p — простое число) в десятичную дробь. А именно, после того как мы нашли какое-то число десятичных знаков и в остатке получилось сравнительно небольшое число, мы можем отыскать дальнейшие цифры, умножая полученное частное на остаток.

И здесь пример лучше всего объяснит суть дела.

Предположим, что мы хотим перевести простую дробь $\frac{1}{97}$ в десятичную. Деля числитель на знаменатель, мы получим, например, ряд цифр 0,01030927835 и остаток 5, а именно:

$$\frac{1}{97}=0,01030927835\frac{5}{97}.$$

Последующие десятичные знаки, очевидно, будут такими, какие дала бы дробь $\frac{5}{97}$, которая представляет собой

$5 \cdot \frac{1}{97}$. Поэтому вместо дальнейшего деления мы можем полученный уже ряд цифр умножить на 5 или, еще лучше, прибавив с правой стороны 0, разделить на 2 и таким образом получить 11 последующих десятичных знаков искомой дроби.

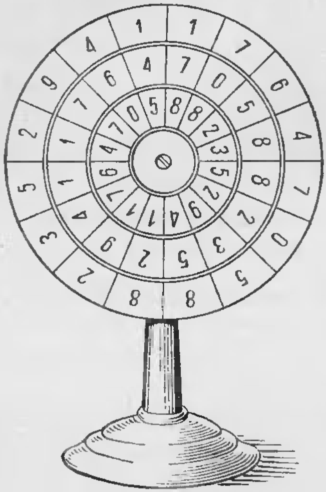


Рис. 275

Основываясь на принципе круговых чисел, можно построить диск... почти магический, написав на трех подвижных его кругах одно и то же число (рис. 275):

$$0588235294117647.$$

Складывая и вычитая числа двух кругов, мы каждый раз будем получать то же самое число, только передвинутое на несколько цифр в сторону.

$$+\begin{array}{r}0588235294117647\\2352941176470588\\\hline 2941176470588235\end{array}\qquad -\begin{array}{r}2352941176470588\\0588235294117647\\\hline 1764705882352941\end{array}$$

7. Формулы для нахождения простых чисел

Самые крупные математики всех времен и народов много труда посвятили тому, чтобы найти общее правило получения простых чисел. Эти усилия пока не увенчались успехом. Однако многие из ученых пришли к решениям, хотя и частного характера, но тем не менее очень интересным.

Лежандр, например, предложил формулу $2x^2 + 29$. Эта формула дает простые числа для значений от $x = 0$ до $x = 28$, то есть для 29 значений x.

Эйлер нашел, что выражение $x^2 + x + 41$ дает простые числа для значений от $x = 0$ до $x = 39$, то есть дает 40 простых чисел.

Американец Эскотт заменил в формуле Эйлера x на $x - 40$ и получил выражение $x^2 - 79x + 1601$, которое при значениях $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 39$ дает простые числа, а именно: при $x = 0$ дает 1601, при $x = 1$ дает 1523, при $x = 2$ дает 1447 и, наконец, при $x = 39$ дает 41. При дальнейших значениях $x = 40, 41, 42, \ldots, 79$ это выражение дает те же самые простые числа, но в обратном порядке. Зато при $x = 80$ получаем:

$$80^2 = 79 \cdot 80 + 1601 = 41^2 \text{ (составное число).}$$

В заключение еще одна формула:

$$N_m = \frac{2^m + 1}{3}.$$

Если вместо m будем подставлять следующие друг за другом нечетные числа, формула будет давать до определенного времени простые числа:

$$N_3 = 3, \quad N_5 = 11, \quad N_7 = 43, \quad N_9 = 683,$$

$$N_{11} = 2731, \quad N_{13} = 43691, \quad N_{15} = 174761,$$

$$N_{17} = 2796203, \; N_{19} = 178956771, \; N_{21} = 715827883,$$

но при $m = 37$ эта формула подводит нас, потому что дает число 45812984491, которое является произведением числа 1777 на 25781083.

8. Несколько интересных признаков делимости

Раньше чем перейти к необычным признакам делимости, напомним вкратце обычные, известные уже из учебников, но, может быть, плохо запомнившиеся признаки делимости на 3, 7, 9, 11, 13, 27, 33, 37, 77, 91, 99, 101, 143, 999, ибо на этих признаках основываются самые различные задачи на отгадывание чисел или результатов действий.

Довольно большой ряд таких отгадок, количество которых прямо-таки неисчислимо, мы приводим в другом месте. Настоятельно советуем читателю попробовать самому придумать собственные фокусы этого рода, беря при этом за основу те более необычные признаки делимости, которые приводятся в конце данного параграфа. С этой целью при задачах на отгадывание мы приводим не только арифметический пример, но и некоторые виды алгебраического решения данных вопросов. Прежде всего, однако, вспомним обычные признаки делимости.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3, на 9 число делится, если сумма его цифр делится на 9.

Число делится на 11, если разность суммы цифр, стоящих на нечетных местах (считая с правой стороны), и суммы цифр, стоящих на четных местах, равна 0 или числу, кратному 11.

Например, для числа 345 796 получится: $6+7+4=17$; $9+5+3=17$; $17-17=0$. Значит, 345 796 делится на 11.

Подобным же образом для числа 92 617 294 находим: $4+2+1+2=9$; $9+7+6+9=31$; $31-9=22$, а так как 22 делится на 11, то и 92 617 294 делится на 11.

Число делится на 99, 33 или на 11, если сумма двузначных чисел, которые образованы цифрами данного числа, считая справа налево, делится на 99, 33 или 11.

Например, для числа 2 037 354 имеем $54+73+03+2=132$, а так как 132 делится на 11 и 33, то и 2 037 354 делится на 11 и 33.

Подобным образом для числа 6 918 021 найдем $21+$ $+80+91+6=198$, а так как 198 делится на 11, 33 и 99, то 6 918 021 делится на 11, 33 и 99.

Число делится на 101, если разность между суммой двузначных чисел, стоящих на четных местах, считая с правой стороны, и суммой таких же чисел, стоящих на четных местах, равна нулю или числу, кратному 101 (например, для 268 405 783 будет $83+40+2=125$; $57+$ $+68=125$; $125-125=0$).

Число делится на 999, 333, 111, 37 или 27, если сумма трех первых его знаков, считая с правой стороны, будет равна сумме последующих трех знаков и будет кратной 999, 333, 111, 37 или 27.

Например, для числа 776 223 имеем $223 + 776 = 999$; $999 = 3 \cdot 333 = 9 \cdot 111 = 27 \cdot 37$ и, следовательно, данное число делится на 999, 333, 111, 37 и 27.

9. Самые легкие для деления и умножения числа

Легче всего делить 35 на 7: достаточно отбросить цифру 3. Имеются ли другие такие же числа?

Умножение на 7 в некоторых случаях происходит также легко: достаточно последнюю цифру числа поставить перед начальной. Но запомнить это самое легкое для умножения на 7 число очень нелегко. Вот оно: 1014492753623188405797. И действительно,

$$7 \cdot 1014492753623188405797 = 7101449275362318840579.$$

Пользуясь случаем, приведем здесь еще два наиболее легких для умножения на 7 числа:

1159420289855072463768,
1304347826086956521739.

Постараемся найти число, которое утроится вследствие перенесения последней цифры на место первой.

Алгебраическим путем это число отыскивается при помощи уравнения

$$3x = a \cdot 10^{n-1} + \frac{x-a}{10},$$

где x — искомое нами число; a — последняя его цифра; n же обозначает количество цифр. Из этого уравнения находим:

$$x = \frac{10^n - 1}{29} \cdot a = \frac{\overbrace{999\ldots.9}^{n \text{ девяток}}}{29} \cdot a.$$

Из чего следует, что нужно найти такое число, написанное при помощи n девяток, которое делится на 29 без остатка. Произведем деление и получим такое «маленькое» частное:

$$x = 344827586206896551724137931 \cdot a,$$

причем окажется, что $n = 28$.

Надо еще подобрать a. Опыт показывает, что a не может быть меньше трех, и, следовательно, $a = 3$, 4, 5, 6, 7, 8 или 9.

Искомых чисел, значит, сразу отыскивается целых семь. При известном терпении можно найти таких чисел больше.

Если возьмем одно из этих чисел, например 1379... 1724, и напишем его по очереди 2, 3, 4 раза, то получим снова число с такими же самыми свойствами, например 1379...17241379...1724.

Можно еще раз делить эту цепь чисел нулями, например 1379...17240001379...172401379...17240001379...1724.

И в этом случае достаточно переставить цифру 4 с конца числа на начало, чтобы утроить число.

10. Несколько интересных исследований

Можно ли определить, какой цифрой будет начинаться и какой кончаться число 777^{777}?

Вопрос, конечно, нелегкий, но и небезнадежный. Вот как нужно приступить к его решению.

Прежде всего найдем в пятизначных таблицах логарифмов

$$\log 777 = 2{,}89042 + \varepsilon, \text{ причем } \varepsilon < 0{,}000005.$$

Отсюда

$$2{,}890415 < \log 777 < 2{,}890425,$$

следовательно,

$$777 \cdot 2{,}890415 < \log 777^{777} < 777 \cdot 2{,}890425,$$

то есть

$$2245{,}8524 < \log 777^{777} < 2245{,}8603.$$

Отыскивая числа, отвечающие мантиссам 0,8524 и 0,8603, найдем два числа, оба начинающиеся цифрой 7. Отсюда следует, что 777^{777} начинаются цифрой 7. Последней цифрой будет также 7. Действительно, числа 777, 777^2, 777^3, 777^4 оканчиваются цифрами 7, 9, 3 и 1. В дальнейших степенях числа 777 эти конечные цифры будут периодически повторяться, а так как $777 = 4 \cdot 194 + 1$, то числа 777^{777} и 777^1 будут оканчиваться на ту же самую цифру 7.

Займемся определением количества цифр, которые нужны для написания всех чисел натурального ряда, начиная от 1 до N включительно.

***
**1
**2
**3
**4
**5
**6
**7
**8
**9
*10
*11
...
*99
100
101
...
340
341

Возьмем для примера число $N = 341$.

Рассмотрим приведенную рядом табличку, образованную из чисел и звездочек. Таблица эта содержит в общей сложности $(341 + 1) \cdot 3$ знаков (звездочек и цифр).

Заметим, что в первой колонке с правой стороны имеется одна звездочка, во второй — 10 звездочек, в третьей — 100, или 10^2. И, стало быть, чтобы написать 341 простое число натурального ряда, надо употребить

$$(341 + 1) \cdot 3 - (10^2 + 10 + 1) = (341 + 1) \cdot 3 - 111 \text{ цифр.}$$

В общем виде оказывается, что если натуральное число N имеет n цифр, то число цифр, нужных для написания всех натуральных чисел от 1 до N, выражается следующим образом:

$$(N + 1) \cdot n - \underbrace{111 \ldots 1}_{n \text{ единиц}}$$

или

$$(N + 1) \cdot n - \frac{10^n - 1}{9}.$$

Например, чтобы написать 7654 первых чисел натурального ряда, нужно

$$(7654 + 1) \cdot 4 - 1111 = 29\,509 \text{ цифр.}$$

Сколько потребуется цифр, чтобы написать все числа натурального ряда от 1 до 99999...9 включительно?

Заметим, что для чисел

однозначных	надо	цифр	$1 \cdot 9 \cdot 10^0 =$	$1 \cdot 9$
двузначных	»	»	$2 \cdot 9 \cdot 10^1 =$	$20 \cdot 9$
трехзначных	»	»	$3 \cdot 9 \cdot 10^2 =$	$300 \cdot 9$
четырехзначных	»	»	$4 \cdot 9 \cdot 10^3 =$	$4000 \cdot 9$
пятизначных	»	»	$5 \cdot 9 \cdot 10^4 =$	$50\,000 \cdot 9$
. . . .	. . .	. . .	. . . .	. . . . .

Следовательно, чтобы написать 99999...9 чисел, начиная от 1, потребуется $(\ldots 54321) \cdot 9$ цифр.

Число (...54321) образуется из записанного в обратном порядке натурального ряда чисел и состоит из стольких цифр, сколько в числе 9999...9 имеется девяток.

Так, например, для написания чисел от 1 до 999 999 требуется цифр

$$654\,321 \cdot 9 = 5\,888\,889.$$

Задачу эту можно также решить на основе установленного выше равенства.

11. Перекрестное умножение

Такое название имеет один интересный вид умножения двух трехзначных чисел, который, видимо, с большим успехом применялся некоторыми известными вычислителями. Одного примера будет достаточно, чтобы ознакомиться с этим приемом.

Предположим, надо умножить 471 на 135.

Умножим сначала единицы; получим единицы произведения: $1 \cdot 5 = 5$. Затем перемножим поочередно десятки первого числа на единицы второго и, наоборот, десятки второго на единицы первого и сложим полученные произведения: $7 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 38$; число 8 будет обозначать десятки искомого произведения, 3 переходит к сотням. Далее умножаем единицы на сотни, десятки на десятки, также сотни на единицы и все это складываем: $1 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 42$, прибавляем 3 из предыдущего действия, получаем $42 + 3 = 45$. Цифра 5 обозначает число сотен произведения, 4 же переходит к тысячам. Затем множим десятки на сотни и сотни на десятки: $4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 19$, прибавляем оставшиеся от предыдущего действия 4, получаем $19 + 4 = 23$, цифра 3 означает число тысяч, а 2 переходит к десяткам тысяч. Наконец, множим сотни на сотни, это будет $4 \cdot 1 = 4$, прибавляем оставшиеся 2 и получаем 6, как число десятков тысяч.

В виде схемы это можно представить таким образом:

471	471	471	471	471
|	×	〉|〈	×	|
135	135	135	135	135
5	3 85	4 585	2 3585	63585

12. Сокращенный способ умножения некоторых чисел

Если придется множить два числа, близкие к 100, можно сильно сократить процесс умножения при помощи так называемых дополнений.

Предположим, нужно произвести умножение 94 на 97. Дополнением множимого до 100 будет 6, дополнением множителя будет 3.

$$\begin{array}{c} 94 - 97 \\ \underline{6 - 3} \end{array}$$

Чтобы получить первые две цифры произведения, надо из любого сомножителя вычесть дополнение к другому: $94 - 3 = 97 - 6 = 91$. Две остальные цифры произведения образуются из умножения дополнений: 6 : 3 = 18. Произведение будет равно 9118.

Сокращение поистине эффектное. А вот его обоснование:

$$94 \cdot 97 = \left\{ \begin{array}{llr} 91 \cdot 97 = 91 \cdot (100 - 3) = & 91 \cdot 100 - 91 \cdot 3 & \\ \underline{3 \cdot 97} = (91 + 6) \cdot 3 \quad = & & \underline{91 \cdot 3 + 6 \cdot 3} \\ 94 \cdot 97 = & = 91 \cdot 100 & + 6 \cdot 3 \end{array} \right.$$

В общем виде: если $x + a = 100$, $y + b = 100$, то

$$xy = (100 - a) \cdot (100 - b) = (100 - a - b) \cdot 100 + ab.$$

Например:

$$97 \cdot 98 = (100 - 3)(100 - 2) =$$
$$= (100 - 5) \cdot 100 + 3 \cdot 2 = 9506.$$

13. Оригинальный способ деления на числа, близкие сотне, тысяче и им подобным

Требуется разделить 24 389 на 97. Вот какая необычная процедура применяется для этого.

$$\begin{array}{r|l} 243 & 89 : 97 = 251\,\frac{42}{97} \\ 7 & 29 \\ & 21 \\ \hline 1 & 39 \\ & 3 \\ \hline 251 & 42 \end{array}$$

Отделяем от делимого с правой стороны вертикальной линией столько цифр, сколько их будет в делителе. Число, стоящее по левую сторону от этой черты (243), умножаем на дополнение делителя (97) к ближайшей сотне, тысяче и т. п. (в данном случае 3). Полученное произведение (729) подписываем так, чтобы единицы находились под единицами. Цифры, которые при этом окажутся по левую сторону от черты (7), множим снова на то же самое дополнение (3) и подписываем второе произведение. Так поступаем до тех пор, пока на левой стороне от черты не надо будет писать никаких цифр. Тогда складываем числа от черты, и если сумма (139) даст цифру, которая перейдет на левую сторону от черты, то снова умножаем ее (1) на это дополнение (3); подписываем произведение и суммируем как справа, так и слева от черты. Окончательное число на левой стороне от черты даст нам частное (251), а число с правой стороны от черты (42) — остаток.

14. Геометрическая арифметика

Ряд интересных и чрезвычайно простых применений графиков к разным арифметическим действиям можно назвать без большого преувеличения *геометрической арифметикой.*

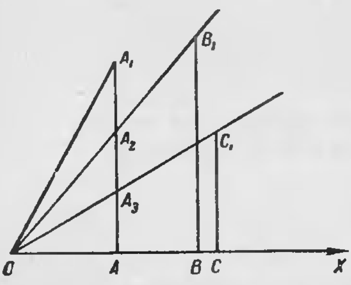


Рис. 276

Родоначальником этой области математики отчасти был также Пифагор, так как ему приписывается инициатива в деле связывания арифметики с геометрией.

Графический счет, несколько примеров которого будет приведено ниже, сложился, однако, только в XIX веке и сразу был перенесен в область практического употребления.

А. Умножение. Даны три числа l_1, l_2, l_3. Надо найти их произведение.

На оси Ox (рис. 276) отложим отрезок OA, равный произвольно выбранной единице длины. Из точки A восстанавливаем перпендикуляр к Ox и откладываем на нем отрезки: $AA_1 = l_1$, $AA_2 = l_2$, $AA_3 = l_3$.

Затем откладываем $OB = AA_1$ и восстанавливаем из точки B перпендикуляр, который пересечет OA_2 в точке B_1. Откладывая $OC = BB_1$, получим точку C и снова восстанавливаем перпендикуляр, который пересечет OA_3 в точке C_1.

Отрезки BB_1 и CC_1 представляют собой соответствующие произведения $l_1 \cdot l_2$ и $l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$, что можно легко доказать, исходя из подобия треугольников OAA_2 и OBB_1, а также треугольников OAA_3 и OCC_1.
Действительно,

$$\frac{BB_1}{AA_2} = \frac{OB}{OA},$$

откуда

$$BB_1 = \frac{OB \cdot AA_2}{OA}.$$

Но

$$OA = 1,\ OB = OA_1 = l_1,\ AA_2 = l_2,$$

следовательно,

$$BB_1 = l_1 \cdot l_2.$$

Подобным же образом

$$CC_1 = BB_1 \cdot l_3 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3.$$

Б. Деление. Два числа, частное от которых требуется получить, обозначаем через a и b. Откладываем $OA = 1$, $OB = b$ и $CB = a$. Тогда отрезок AM даст нам искомое частное (рис. 277).

Действительно,

$$\frac{AM}{OA} = \frac{BC}{OB},$$

откуда

$$AM = \frac{BC \cdot OA}{OB},$$

а так как $BC = a$, $OA = 1$, $OB = b$, то

$$AM = \frac{a}{b}.$$

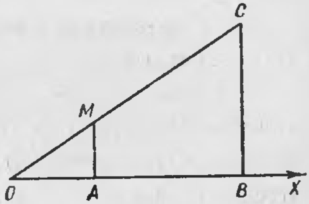


Рис. 277

В. Возведение в степень. Число, которое мы должны возвести в какую-нибудь степень, представляем в виде отрезка a (рис. 278).

Начертим две взаимно перпендикулярные оси OX и OY. На оси OX отложим $Oa_0=1$ и на оси OY откладываем $Oa_1 = a$. Соединяем a_0 с a_1 нрямой линией и из точки a_1 восстанавливаем нерпендикуляр к этой линии. Этот перпендикуляр пересечет Ox влево от O в точке a_2; из этой точки снова восстанавливаем перпендикуляр к a_1a_2, и т. д.

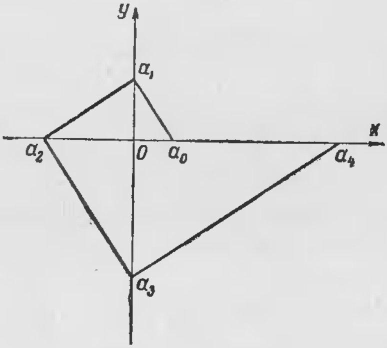


Рис. 278

Докажем, что $Oa_2 = a^2$, $Oa_3 = a^3$, $Oa_4 = a^4$, и т. д.

Основываясь на известной теореме о том, что нерпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу в прямоугольном треугольнике, является средним пропорциональным между отрезками, на которые он делит гипотенузу, получим:

$$Oa_0 \cdot Oa_2 = (Oa_1)^2, \text{ то есть } \quad Oa_2 = a^2,$$
$$Oa_1 \cdot Oa_3 = (Oa_2)^2, \text{ то есть } a \cdot Oa_3 = a^4,$$

откуда

$$Oa_3 = \frac{a^4}{a} = a^3,$$

$$Oa_2 \cdot Oa_4 = (Oa_3)^2, \text{ то есть } a^2 \cdot Oa_4 = a^6,$$

откуда

$$Oa_4 = \frac{a^6}{a^2} = a^4,$$

и т. д.

Г. Извлечение квадратного корня. Способ I. Достаточно найти отрезок AM, который являлся бы средним геометрическим для отрезков $OA = 1$ и AB, равного числу N (рис. 279).

Действительно,

$$AM = \sqrt{OA \cdot AB}, \quad AM = \sqrt{N}.$$

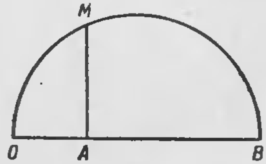


Рис. 279

Если N будет очень большим числом и отложить его графически не удастся, то можно применить метод, описанный ниже.

Способ II. Этот способ основывается на теореме Ферма о том, что каждое целое число — это или полный квадрат, или сумма двух, трех или четырех квадратов. Это означает, что каждое целое число можно разложить на полные квадраты, а затем извлечь из них корни, применяя теорему Пифагора для прямоугольных треугольников.

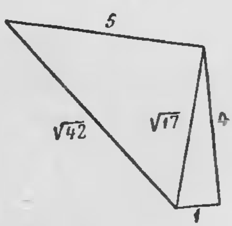


Рис. 280

Требуется, например, извлечь квадратный корень из числа 42. Разлагаем это число на полные квадраты: $42 = 1^2 + 4^2 + 5^2$.

Построим первый прямоугольный треугольник с катетами, равными 1 и 4 (рис. 280). Гипотенуза будет равняться $\sqrt{17}$. Примем ее за катет нового прямоугольного треугольника, второй катет которого будет равным 5. Гипотенуза этого второго треугольника будет равна $\sqrt{42}$.

Если данное нам число может быть разложено на полные квадраты многими способами, то следует выбрать из них самый удобный. Например:

$$28 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2;$$
$$28 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2;$$
$$28 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2;$$
$$28 = 8^2 - 6^2.$$

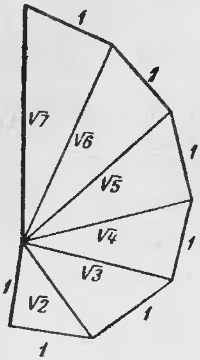


Рис. 281

Самым удобным будет последнее равенство. Достаточно построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого будет равняться 8, а один из катетов равен 6, как второй катет даст нам $\sqrt{28}$.

При других вариантах можно пользоваться ступенчатым строением прямоугольных треугольников, из которых первый имеет оба катета, равные каждый 1 (рис. 281). Гипотенуза такого треугольника дает $\sqrt{2}$. Строя дальше треугольники согласно прилагаемому рисунку, будем получать гипотенузы, равные поочередно $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т. д.

Д. Геометрические прогрессии. Решим графически следующую задачу.

Зная два первых члена убывающей геометрической прогрессии, найти остальные ее члены.

Чертим отрезок AB', равный первому из двух данных членов прогрессии (рис. 282).

Через точки A и B' проведем две произвольно взятые линии OY и OZ, пересекающиеся в точке O. На AB' отложим отрезок IB', равный второму члену прогрессии. Через точку I проведем прямую, параллельную OZ. Через точку пересечения B этой прямой с прямой OY, проводим прямую, параллельную AB'; затем через точку C' — параллельную $B'B$, и т. д. Тогда

$$\frac{BC'}{AB'}=\frac{OB}{OA}=\frac{OC'}{OB'}=\frac{OC}{OB}=\frac{CD'}{BC'}=\ldots$$

Это означает, что члены данной прогрессии будут равняться отрезкам AB', BC', CD', DE' и т. д.

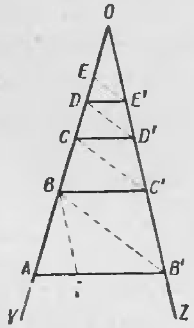


Рис. 282

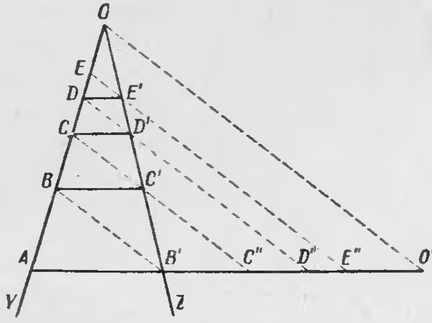


Рис. 283

На основе сказанного выше можно легко отыскать сумму любого числа членов убывающей геометрической прогрессии. Достаточно продлить линии CC', DD', EE',... до их пересечения с продолжением линии AB' в точках C'', D'', E'' (рис. 283), и т. д.

Ясно, что AC'', AD'', AE'' — это суммы двух, трех и четырех членов прогрессии.

Если через точку O провести до пересечения с продолжением отрезка AB' в точке O'' прямую OO'', параллельную прямой BB', то получим отрезок AO'', который будет представлять собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$AO''=AB'+BC'+CD'+DE'+\ldots$$

На рисунке 284 отрезки AB', BC', CD', DE',... являются, как нам уже известно, членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменателем которой будет отношение OC': OB', а суммой — отрезок AO''. Но на этом же рисунке имеем:

$$\frac{CC'}{BB'}=\frac{OC'}{OB'}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD'}{OC'}=\frac{DD'}{CC'}=\ldots$$

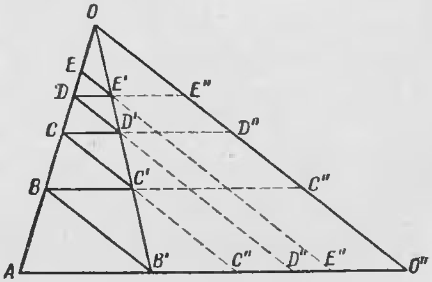


Рис. 284

Это означает, что отрезки BB', CC', DD', EE',... также являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии с тем же самым знаменателем OC' : OB', что и в предыдущей прогрессии, но только с другим первым членом.

Легко установить, что сумма членов этой прогрессии равна отрезку OO''.

Интересны результаты графического изображения суммы некоторых особенных прогрессий. Они очень наглядно подтверждают результаты, достигнутые чисто арифметическим путем.

Известно, например, что прогрессия $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ с бесконечным числом членов дает в сумме 1.

Графически такую прогрессию можно представить в виде квадрата, сторона которого, а следовательно, и площадь, равняется единице.

В первый квадрат (рис. 285) впишем второй так, чтобы его вершины лежали на точках, делящих стороны первого квадрата пополам. Легко доказать, что сумма площадей заштрихованных треугольников $AA'D' + BB'A' + CC'B' + DD'C'$ равняется половине площади квадрата $ABCD$, то есть $\frac{1}{2}$. Сумма треугольников, зарисованных точками, равняется четверти квадрата $ABCD$; сумма треугольников, зарисованных клеточками, равняется $\frac{1}{8}$, и т. д. Продолжая

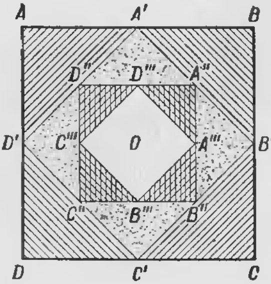


Рис. 285

эту прогрессию в бесконечность, мы, разумеется, в пределе получим всю площадь первоначального квадрата $ABCD$.

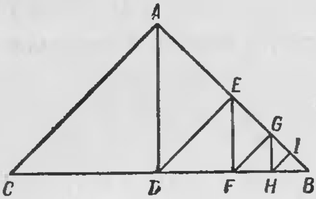


Рис. 286

Доказательство с помощью прямоугольного треугольника, очень близкое к приведенному, предоставляем самому читателю (см. рисунок 286).

Обратим внимание лишь на то, что на этом рисунке следует катеты AD и CD принять равными каждый единице.

Но зато некоторых, несложных впрочем, пояснений требует начерченное ниже графическое изображение суммы следующей бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Примем, что треугольник ABC (рис. 287) имеет площадь, равную единице. Точки D и E являются серединами сторон AC и AB; BD будет, следовательно, медианой, опущенной из вершины B.

Соединим точки D и E и проведем прямую EF, параллельную AC, затем прямую FG, параллельную DE, и т. д.

Из рисунка ясно видно, что заштрихованные треугольники ADE, EFG и другие имеют площади, равные $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$,... площади треугольника ABC.

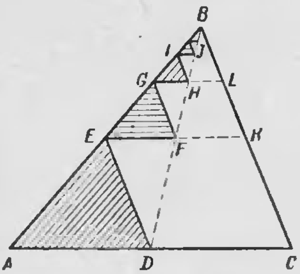


Рис. 287

Сумма их равняется $\frac{1}{3}$, так как треугольник ADE равен $\frac{1}{3}$ площади трапеции $AECK$, треугольник EFG равен $\frac{1}{3}$ площади трапеции $EGLK$, и т. д.

Отсюда $\Delta ADE + \Delta EFG + \ldots$ равняется $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC, то есть выражается числом $\frac{1}{3}$. Но поскольку

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3},$$

то, конечно,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{4}{3}.$$

Е. Суммирование чисел в натуральном числовом ряду. Как найти графическим путем сумму n простых чисел натурального ряда 1, 2, 3,...?

Присмотримся к фигуре $AEFD$ (рис. 288), образованной из прямоугольников, составленных из 1, 2, 3, 4, ... n

равных квадратиков, из которых каждый представляет единицу площади. Площадь фигуры $AEFD$ представляет собой сумму S простых n чисел натурального ряда. Если присоединить к ней сверху такую же фигуру $EFCB$, то получится прямоугольник $ABCD$, который, как это видно непосредственно из рисунка, содержит $n(n+1)$ квадратиков и площадь которого будет, конечно, равна $2S$.

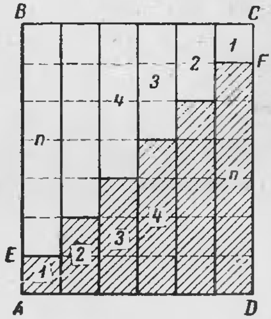


Рис. 288

Отсюда формула

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Подобным же образом можно отыскать при помощи простых геометрических фигур сумму простых n нечетных чисел натурального ряда.

Возьмем квадраты $AEFG$ и $A'E'F'G'$ (рис. 289), стороны которых равны k и $k+1$ единиц. Разность площа-

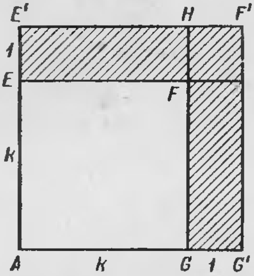


Рис. 289

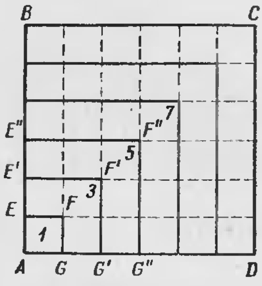


Рис. 290

дей этих двух квадратов — заштрихованная фигура $EE'F'G'GF$, названная греками *гномоном*, складывается из двух прямоугольников с общей площадью, равной 2, и из квадрата, площадь которого равна единице.

Прибавляя тогда к квадрату k^2 гномон, представляющий нечетное число $2k + 1$, получим квадрат $(k + 1)^2$. Если к квадрату с площадью, равной единице, который изображен на рисунке 290, прибавить гномон, равный $2 \cdot 1 + 1$, то есть 3, мы получим квадрат $AE'F'G'$, равный $(1 + 1)^2$, то есть 2^2. Прибавляя к нему гномон $2 \cdot 2 + 1 = 5$, получим квадрат $(2 + 1)^2$, то есть 3^2, и т. д. Если квадрат с площадью, равной единице, мы тоже будем называть гномоном, то можно сказать, что сумма n гномонов, расположенных один над другим, или сумма n простых нечетных чисел, равняется квадрату со стороной n, то есть n^2. Иначе: *сумма простых нечетных чисел натурального ряда равняется квадрату их числа.*

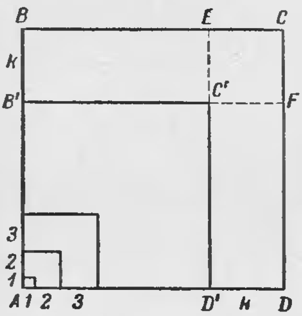


Рис. 291

Графическое изображение этого вычисления, как мы уже говорили раньше, было дано, вероятно, Пифагором.

Нетрудно представить графически вычисление суммы кубов простых k натуральных чисел.

Стороны квадрата $ABCD$ (рис. 291) равны сумме $1 + 2 + 3 + \ldots + k$. В этом квадрате при вершине A построим ряд квадратов со сторонами:

$$1,\ (1 + 2),\ 1 + 2 + 3,\ \ldots\ ,\ 1 + 2 + 3 + \ldots + k.$$

Гномон $BCDD'C'B'$ с шириной, равной k, имеет площадь:

$$BB'FC + DD'CE - CEC'F = 2 \cdot k \cdot AD - k^2.$$

Но

$$AD = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

поэтому площадь гномона $BCDD'C'B'$ составляет:

$$k^2(k+1) - k^2 = k^3.$$

Следовательно, отдельные гномоны, отмеченные на рисунке, будут иметь площадь: 1^3, 2^3, $3^3, \ldots, k^3$. Сумма их представляет собой, как видим, квадрат со стороной, равной $1 + 2 + 3 + \ldots + k$. Это значит, что *сумма кубов простых чисел натурального ряда равняется квадрату суммы этих чисел*, то есть

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

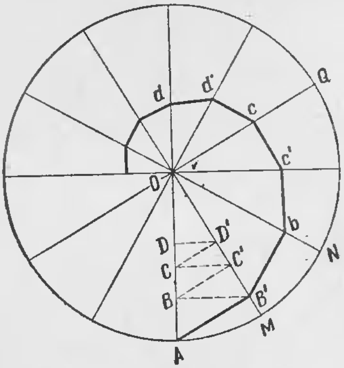


Рис. 292

Ж. Одна обратная задача. До сих пор мы занимались исключительно графическим представлением и решением арифметических задач. Будет, однако, полезно рассмотреть хотя бы одну задачу противоположного характера, исходным пунктом которой является некоторая графическая идея, а результат дает интересные арифметические выводы.

Окружность разделена на некоторое число равных дуг AM, MN, NP, PQ и т. д. (рис. 292). Точки A, M, N, P, Q и так далее соединены с центром O прямыми, которые являются радиусами этой окружности. Из точки A опустим на радиус OM перпендикуляр AB'; из точки B' также опускаем перпендикуляр $B'b$ на ON, и т. д. Интересно будет найти суммы всех этих перпендикуляров, образующих как бы спираль, выходящую из A и устремленную к точке O.

Нетрудно убедиться, что линия $AB'bc'cd'd...$ будет по своей длине одинаковой с ломаной линией $AB'BC'CD'D...$

Известно также, что отрезки AB', BC', CD',... образуют геометрическую прогрессию и что отрезки $B'B$, $C'C$, $D'D$,... образуют геометрическую прогрессию с таким же самым знаменателем.

Более того, все отрезки AB', $B'B$, BC', $C'C$, CD', $D'D$,... являются членами *одной* геометрической прогрессии, как это следует из равенства отношений:

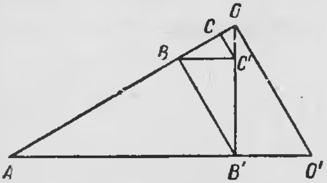


Рис. 293

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{BC'}{BB'} = \frac{CC'}{BC'} = \frac{CD'}{CC'} = \frac{DD'}{CD'} = \ldots$$

Следовательно, длина ломаной линии $AB'bc'cd'd...$ равна сумме членов некоторой геометрической прогрессии.

Рассмотрим этот вопрос для тех случаев, когда окружность разделена на 6, 8 и 12 равных частей, причем радиус круга будем всегда принимать за единицу.

Гексагон. В треугольнике AOO' (рис. 293) радиус $AO = 1$, $\angle AOB' = \angle AO'O = 60°$, $\angle OAO' = 30°$; следовательно, $AO' = 2 \cdot OO'$.

Отсюда следует, что

$$AO' = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad OO' = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомая сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $AB' + B'B + BC' + C'C + \ldots$ состоит из членов $AB' + BC' + \ldots$, которые в сумме дают отрезок AO', а также членов $B'B + C'C + \ldots$, дающих в сумме отрезок OO'. Окончательно получаем:

$$AO' + OO' = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

то есть равняется стороне равностороннего треугольника, вписанного в окружность с радиусом, равным единице. А так как

$$AB' = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad BB' = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad BC' = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

то, следовательно, это будет одновременно суммой бесконечной прогрессии:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{4}, \ \frac{\sqrt{3}}{8}, \ \dots \ \text{с основанием } \frac{1}{2}.$$

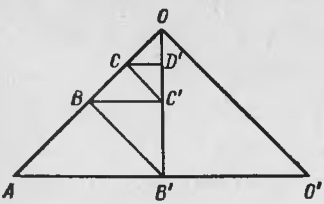


Рис. 294

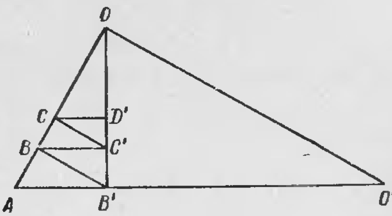


Рис. 295

Октогон. Дано $AO = OO' = 1$ (рис. 294), и, значит, $AO' = \sqrt{2}$.

Искомая сумма составляет $OO' + AO' = 1 + \sqrt{2}$, следовательно, будет равна радиусу круга, увеличенному на длину стороны квадрата, вписанного в этот круг, и одновременно это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{4}, \ \dots \ \text{с частным } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Додекагон. $AO = 1$, $\angle OAO' = 60°$, $AO' = 2 \cdot AO = 2$, отсюда $OO' = \sqrt{3}$ (рис. 295).

Искомая сумма составляет $AO' + OO' = 2 + \sqrt{3}$, следовательно, равняется диаметру круга, увеличенному на длину стороны равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность. И одновременно это сумма бесконечной прогрессии:

$$\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{8},\ \ldots \quad \text{с частным } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

15. Различные мелкие, но любопытные факты из области чисел

Треугольник Паскаля составлен таким образом, что каждое число, кроме, конечно, крайних единиц, равняется сумме ближайших чисел, стоящих над ним:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

В первом диагональном ряду размещаются одни единицы, во втором ряду — последовательные натуральные числа, в третьем диагональном ряду — треугольные числа. Расстояния между треугольными числами выражаются последовательными натуральными числами.

Выпишем числа четвертого диагонального ряда:

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35, \ldots$$

Числа эти можно изобразить при помощи фигур в трехмерном пространстве; это знакомые нам уже пирамидальные числа.

Чтобы дать графический образ пятого диагонального ряда

$$1,\ 5,\ 15,\ 35,\ 70, \ldots ,$$

надо было бы прибегнуть к пространству с четырьмя измерениями. Но мы пока отказываемся от такого путешествия.

О числах треугольника Паскаля можно было бы много еще написать; здесь мы попросим лишь обратить внимание на то, что сумма чисел в каждой горизонтальной строке является степенью числа 2:

$$\begin{gathered} 1 = 2^0 \\ 1 + 1 = 2^1 \\ 1 + 2 + 1 = 2^2 \\ 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \\ 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Умножая восьмерки и складывая цифры произведений, получаем интересные результаты:

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 8 = 8 & & \\ 2 \cdot 8 = 16 & 1 + 6 = 7 & \\ 3 \cdot 8 = 24 & 2 + 4 = 6 & \\ 4 \cdot 8 = 32 & 3 + 2 = 5 & \\ 5 \cdot 8 = 40 & 4 + 0 = 4 & \\ 6 \cdot 8 = 48 & 4 + 8 = 12 & 1 + 2 = 3 \\ 7 \cdot 8 = 56 & 5 + 6 = 11 & 1 + 1 = 2 \\ 8 \cdot 8 = 64 & 6 + 4 = 10 & 1 + 0 = 1 \end{array}$$

Умножая число 91 на числа, следующие друг за другом от 1 до 9, получим трехзначные произведения, в которых первые цифры образуют ряд от 0 до 8, последние — от 1 до 9, а средние — от 9 до 1:

$$1 \cdot 91 = 091$$
$$2 \cdot 91 = 182$$
$$3 \cdot 91 = 273$$
$$4 \cdot 91 = 364$$
$$5 \cdot 91 = 455$$
$$6 \cdot 91 = 546$$
$$7 \cdot 91 = 637$$
$$8 \cdot 91 = 728$$
$$9 \cdot 91 = 819$$

Число 3367, поочередно умножаемое на члены арифметической прогрессии, у которой первым членом и разностью является 33, дает в произведениях однородные ряды цифр:

$$33 \cdot 3367 = 111111$$
$$66 \cdot 3367 = 222222$$
$$99 \cdot 3367 = 333333$$
$$132 \cdot 3367 = 444444$$
$$165 \cdot 3367 = 555555$$
$$198 \cdot 3367 = 666666$$
$$231 \cdot 3367 = 777777$$
$$264 \cdot 3367 = 888888$$
$$297 \cdot 3367 = 999999$$

Как можно написать 100 при помощи девяти цифр — от 1 до 9?

Возможен такой путь:

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$
$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$
$$100 = 123 - 45 - 67 + 89$$

Последнее решение самое интересное, так как здесь употребляются только три знака действий. Это решение — единственное в своем роде.

Если p — простое число, то число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)+1$$

будет делиться без остатка на p.

Это положение в математике известно под названием *теоремы Вильсона*.

Например, для $p=5$ имеем:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4+1=25, \text{ и } 25 \text{ делится на } 5;$$

для $p=7$ имеем:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6+1=721, \text{ и } 721 \text{ делится на } 7.$$

Леонардо Фибоначчи из Пизы, математик XIII века, описал интересный ряд чисел, образованный таким путем, что на первом и на втором месте стоят единицы, а затем каждое последующее число равняется сумме двух предыдущих, а именно:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots$$

Этот ряд, если применить его последовательно и в числителях и в знаменателях, дает необычайно интересные виды дробей, а именно:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \ldots$$

Итак,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},$$

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},$$

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}},$$

и т. д.

Кроме того, ряд Фибоначчи, который встретится нам в нескольких местах этой книги, имеет еще одно интересное свойство: если из квадрата какого-нибудь числа ряда Фибоначчи вычесть произведение соседних чисел, то всегда будет получаться единица, причем один раз со знаком плюс, другой раз со знаком минус:

$$\begin{aligned}
1^2 - 1\cdot 2 &= -1\\
2^2 - 1\cdot 3 &= +1\\
3^2 - 2\cdot 5 &= -1\\
5^2 - 3\cdot 8 &= +1\\
8^2 - 5\cdot 13 &= -1\\
13^2 - 8\cdot 21 &= +1\\
21^2 - 13\cdot 34 &= -1
\end{aligned}$$

Как легко извлечь квадратный корень из 625! Достаточно зачеркнуть 6.

Очень странным путем можно сократить такие дроби, как $\frac{19}{95}$ или $\frac{49}{98}$. Достаточно зачеркнуть в числителях и знаменателях девятки.

Числа 324 и 648 имеют ту общую черту, что их крайняя цифра (левая или правая) обозначает число, в восемь раз меньшее, чем две остальные:

$$3 = \frac{24}{8}, \quad 4 = \frac{32}{8} \quad \text{и} \quad 6 = \frac{48}{8}, \quad 8 = \frac{64}{8}.$$

Вот умножения, в которых не повторяется ни одна цифра натурального ряда от 0 до 9, но ни одна из них также не отсутствует:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3907 &= 15628 \\ 3 \cdot 6819 &= 20457 \\ 4 \cdot 7039 &= 28156 \\ 6 \cdot 5817 &= 34902 \\ 7 \cdot 9403 &= 65821 \end{aligned}$$

И еще несколько любопытных фактов:

$$88^2 = 88 \cdot 88 = 7744.$$

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555.$$

$$41^2 = 1681, \text{ но } 16 = 4^2 \text{ и } 81 = 9^2.$$

Это единственная комбинация такого рода.

$33^2 = 1089$, но и 9801 будет полный квадрат, так как $9801 = 99^2$.

Случай единственный.

А может быть, и не единственный, так как $836^2 = 698\,896$, а будучи взято в обратном порядке, это число также даст полный квадрат. Не правда ли?

Вот все четырехзначные числа, написанные одними четными числами, которые являются к тому же полными квадратами:

$$4624 = 68^2$$
$$6084 = 78^2$$
$$6400 = 80^2$$
$$8464 = 92^2$$

А это опять единственные в своем роде числа, равные сумме цифр своих собственных кубов:

$$
\begin{array}{lll}
8^3 = 512 & 5 + 1 + 2 & = 8 \\
17^3 = 4913 & 4 + 9 + 1 + 3 & = 17 \\
18^3 = 5832 & 5 + 8 + 3 + 2 & = 18 \\
26^3 = 17576 & 1 + 7 + 5 + 7 + 6 & = 26 \\
27^3 = 19683 & 1 + 9 + 6 + 8 + 3 & = 27
\end{array}
$$

Вот еще один интересный пример:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}, \quad \frac{166}{664} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1666}{6664} = \frac{1}{4}, \ldots$$
$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}, \quad \frac{199}{995} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1999}{9995} = \frac{1}{5}, \ldots$$
$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}, \quad \frac{266}{665} = \frac{2}{5}, \quad \frac{2666}{6665} = \frac{2}{5}, \ldots$$

V. МАТЕМАТИКА В ЖИВОЙ ПРИРОДЕ

1. Маленький закройщик

Маленький, едва достигающий 4 *мм* длины, математик, называемый *березовый долгоносик*, вероятно, изучал в каком-нибудь университете, незаметно от менее способных своих коллег — людей, высшую математику, так как он может решать такие задачи, над которыми не один студент изрядно поломает голову. Ходит себе такой долгоносик *1* (см. рисунок 296) по листьям березы, ольхи, бука и надгрызает их от срединной прожилки *3* в двух направлениях к краям по довольно сложным кривым. Затем свертывает из обеих половинок листа трубку, что-то наподобие пустотелой сигары *4*, тщательно прячет в ней свои яички, чтобы их не смыло дождями, не сожгло солнце, не выклевали птицы. И висят себе на ветру такие люльки будущих младенцев. На решение такой нелегкой задачи, требующей многих чертежей и вычислений, долгоносик тратит не больше чем полчаса.

Посмотрим, сколько потребуется времени нам хотя бы только на то, чтобы проникнуть в математические тайны «талантливого» жучка.

Исследуя ряд листьев разных пород деревьев, подвергшихся операциям долгоносика, мы убедимся, что форма кривой, по которой надгрызаются листья, сильно зависит от кривизны кромки данного листа. Эта форма кривой надгрыза является *эволютой* кромки листа, линия кромки,

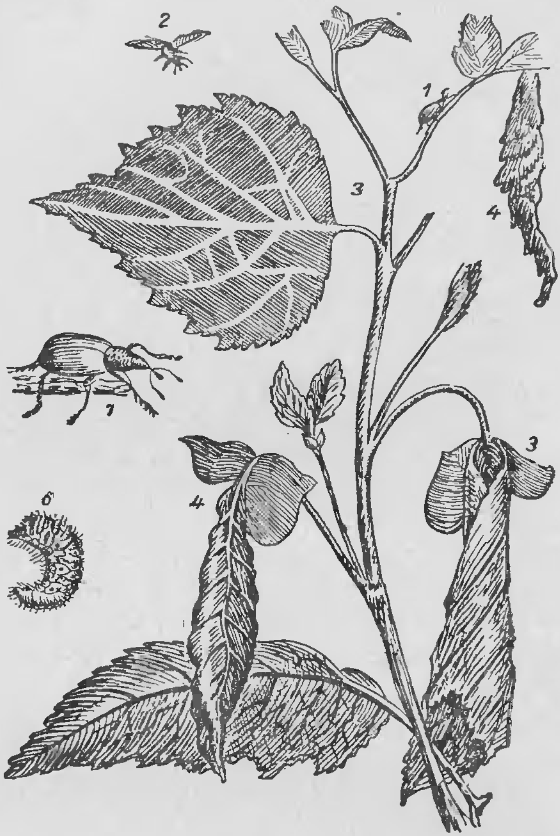


Рис. 296

в свою очередь, является *эвольвентой* для формы, вычерченной хоботком маленького геометра.

Вы, наверное, спросите, что это такое: эволюта и эвольвента. Может быть, также какие-нибудь насекомые? Не совсем... скорее они напоминают формой улиток, точнее — их раковины. На помещенном ниже рисунке 297 видны две кривые $ABCDE$ и $abcde$, которые находятся друг с другом в таком отношении, что линии aA, bB, cC и так далее будут касательными к окружности $abcde$, а для кривой $ABCDE$ — перпендикулярами.

И вот, $ABCDE$ называется эвольвентой окружности $abcde$, окружность же $abcde$ — эволютой кривой $ABCDE$. Чтобы начертить эвольвенту окружности $abcde$, надо вырезать из довольно толстой дощечки ободок, равный данной окружности, и прикрепить неподвижно к бумаге, обмотав его ниткой в направлении, противоположном ходу часовой стрелки. На конце нитки надо сделать маленькую петельку и вставить в нее конец карандаша. Предположим, что карандаш будет стоять на окружности O в точке x. Если теперь, следя за тем, чтобы нитка была постоянно натянута, мы начнем ее разматывать, то острие карандаша начертит эвольвенту. Если $Ee = ex$, $Dd = dx$, $Cc = cx$, $Bb = bx$, $Aa = ax$, то эвольвентой будет именно кривая $EDCBA$.

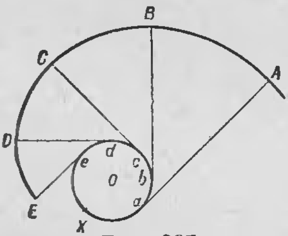


Рис. 297

Из описанного способа получения чертежа эвольвенты легко увидеть, что касательные эволюты (которые будут одновременно и радиусами эвольвенты) равняются всегда той части эволюты, из которой они развертываются.

Если же мы хотим для данной эвольвенты начертить эволюту, то надо из ряда точек эвольвенты провести перпендикуляры, или так называемые *нормали*, пересечение которых даст нам ломаную линию.

Вписав затем в эту ломаную линию касательную к ее отрезкам, получим эволюту.

Именно такую задачу решает долгоносик на листьях березы. Пойдем по его следам.

Начертим половину листа *ABCDEFGH* (рис. 298) и условимся, что *ABCDEFG* — такая кривая линия, для которой мы хотим найти эволюту.

Проведя в этих точках ряд нормалей, то есть перпендикуляров к данной кривой, получим эволюту *abcdefg*, которую долгоносик вырезает на первой половине листа.

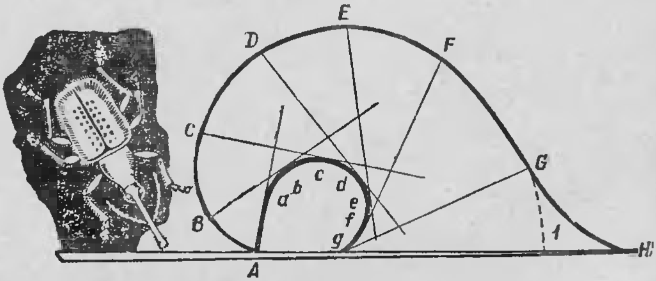


Рис. 298

Над другой половиной мудрый жучок столько не трудится. Здесь он действует уже по принципу экономии труда, так как, накручивая вторую, свободную половину на первую, жучок не нуждается в таком старательном вычерчивании эволюты; делает это он просто так, «на глазок».

2. Математические шедевры из воска

Если жучок, который умеет быстро и правильно решать всего одну геометрическую задачу, вызывает искреннее удивление, то что же можно сказать о настоящих математических шедеврах, создаваемых маленькими обитателями улья.

Присмотримся к строению сотов. Состоят они из ряда шестигранных восковых ячеек, уложенных в двух пластах и стыкающихся общими донышками. Рисунок 299 дает представление об отверстиях и форме донышек этих ячеек.

Донышки не плоские: это наугольники, образованные из трех равных ромбов. Более отчетливо это можно видеть на обособленной ячейке (рисунок 300), а также на двух ячейках, соприкасающихся друг с другом так, как это показано на рисунке 301.

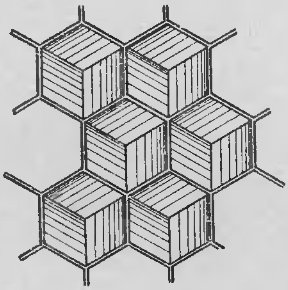


Рис. 299

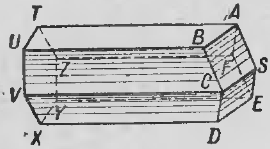


Рис. 300

Угол ABC ромба, а следовательно, и угол CSA, имеет $109°28'$, $\angle SCB = \angle SAB = 70°32'$. Глубина ячейки равняется 11,3 *мм*, ширина грани, то есть каждой из шести

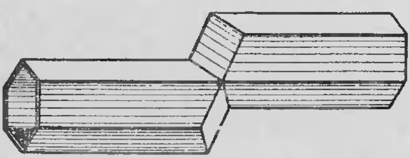


Рис. 301

стенок ячейки, составляет 2,71 *мм*, толщина равна толщине обычной писчей бумаги. Если кто-нибудь захочет построить себе модель увеличенной пчелиной ячейки, пусть воспользуется приведенным на рисунке 302 развернутым ее планом.

Займемся сначала шестиугольной формой ячеек. Интересно, почему именно эту форму избрали пчелы для разреза своих восковых призм? Это явилось результатом стремления использовать самым экономным способом площадь внутри тесного улья. Надо было прежде всего выбрать такой многоугольник, который, будучи много раз повторен, покрывал бы площадь улья без каких-либо трещин или щелей. Какие правильные многоугольники, пригодные для этой цели, открыл еще Пифагор? Такими многоугольниками являются треугольники, квадраты и шестиугольники. О других многоугольниках мудрые пчелы

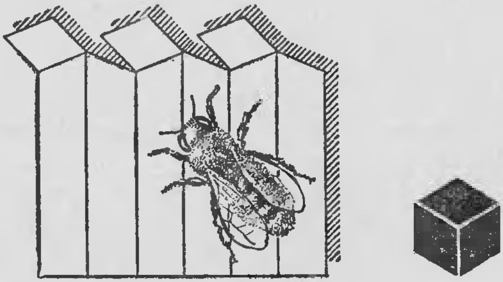


Рис. 302

не хотели даже и думать, так как в этом случае, для того чтобы заполнить всю площадь улья, они вынуждены были бы строить ячейки двух типов и больше, что всегда сильно усложняет работу. Они должны были, следовательно, выбирать из трех основных геометрических фигур, и из этих трех они выбрали шестиугольник. Почему? Потому что при равной поверхности шестиугольник имеет наименьший периметр. Значит, строя шестиугольные ячейки, можно получить наибольшую емкость ячеек при относительно наименьших затратах воска.

Действительно, представим себе правильный треугольник, квадрат и шестиугольник с одинаковой площадью и сравним их периметры.

Для треугольника

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда вычисляем сторону:

$$a = 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}},$$

а затем периметр

$$P_1 = 3a = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}.$$

Для квадрата с площадью S периметр будет равен:

$$P_2 = 4\sqrt{S}.$$

Наконец, правильный шестиугольник со стороной c имеет площадь:

$$S = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда периметр

$$P_3 = 6c = 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}.$$

Отношение периметров выразится следующим образом:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} : 4\sqrt{S} : 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} =$$
$$= 1 : \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} : \frac{1}{3}\sqrt{6} = 1 : 0{,}905 : 0{,}816.$$

Следовательно, относительно самый маленький периметр имеет, как это правильно определили пчелы, шестиугольник.

Не менее разумно поступили они, избрав для своих ячеек из многих других возможных форм донышек форму трехгранного наугольника.

Через точку S (рис. 303), лежащую на продолжении оси OO' призмы, и через каждую из сторон равностороннего треугольника ACE проведем три плоскости, которые отделят от призмы три треугольные пирамиды $BACK$,

$DCEH$, $FEAL$ и которые можно заместить одной пирамидой $SACE$. Новый многогранник будет, следовательно,

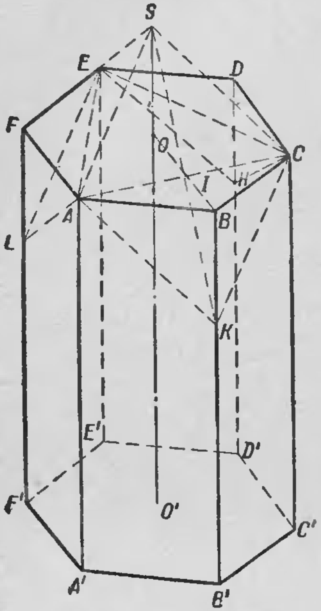


Рис. 303

ограничен сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCHE$, $SELA$. Объем этого нового образования равняется объему первоначальной призмы $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, независимо от того, где на оси OO' мы выберем место для точки S, так как пирамида $SACE$ состоит из трех пирамид $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, равных пирамидам, которые мы отсекли, например $SOAC = KBAC$.

При равном объеме этих наугольников, более острых или более тупых (в зависимости от того, как высоко мы возьмем точку S), площадь каждого из них при изменении положения S не останется, конечно, той же самой. Найдем, при какой величине $SO = x$ эта площадь будет наименьшей.

Обозначим AB через a, $BB' = OO'$ через b, тогда

$$AC = a\sqrt{3},$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2},$$

откуда $SK = 2 \cdot SI = \sqrt{4x^2 + a^2}$.

Площадь ромба $SAKC$, равную половине произведения его катетов AC и SK, можно выразить формулой $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$, а площадь трапеции $CKB'C'$ — формулой $\frac{1}{2}a(2b - x)$.

Площадь многогранника, не считая площади основания, будет равняться:

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}+3a(2b-x)=$$
$$=3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x\right].$$

Множитель $3a$ не влияет на то, где будет максимум, а где минимум поверхности. Вопрос, следовательно, сводится к установлению минимума величины, стоящей в скобках.

Предположим, что

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x=m.$$

Из этой формулы видно, что $m > 2b$.

После упрощения получим:

$$8x^2-8(m-2b)x+[3a^2-4(m-2b)^2]=0.$$

Чтобы x было положительным числом, необходимо прежде всего, чтобы дискриминант Δ приведенного выше квадратного уравнения был отрицательный:

$$\Delta = 64(m-2b)^2-32[3a^2-4(m-2b)^2]\geqslant 0,$$

откуда

$$\Delta = 192(m-2b)^2-96a^2\geqslant 0,$$

то есть

$$\Delta = 192\left[(m-2b)^2-\frac{a^2}{2}\right]\geqslant 0.$$

Чтобы это условие было выполнено, должно быть

$$m-2b\geqslant\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Из этого видно, что наименьшим значением величины будет $2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$. Умножая его на $3a$, убедимся, что искомая минимальная площадь равняется $6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}}$. Соответствующая величина x составляет $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Площадь поверхности $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ без одного основания равняется $6\,ab + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Значит, минимальная площадь нового многогранника будет меньше площади первоначальной шестиугольной призмы на величину $\frac{3}{2}\ a^2\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Иначе говоря: если бы пчелы делали донца своих ячеек совершенно плоскими, они вынуждены были бы затрачивать на это больше воска (при той же самой емкости ячейки), чем при применении наугольника с минимальной площадью.

Нетрудно заметить, что к треугольнику KBI применима пропорция $BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Отсюда при помощи тригонометрии найдем величину угла BIK, равную $35°15'12''$, что соответствует углу ромба $109°28'$. И вот именно этот угол, отвечающий наименьшей площади наугольника, пчелы как раз и выбрали для постройки донышек своих ячеек. Благодаря этим великолепным расчетам наши бережливые конструкторы экономят около 2% воска, а точнее: из сэкономленного на строительстве 54 ячеек воска они могут дополнительно построить целую ячейку.

«Математический гений» пчел приводил людей в изумление уже в глубокой древности. О нем говорили Аристотель (IV век до н. э.) и Плиний Старший (I век н. э.).

Папп в III веке н. э. первый начал рассматривать ячейку как геометрическое строение и обратил внимание на ее хорошие геометрические свойства с точки зрения минимальности периметра и заполнения всей площади без пропусков.

Знаменитый физик Реомюр, допуская, что при выборе формы донышек пчелы руководствовались принципом экономии воска, предложил немецкому математику Кёнигу подсчитать, при каких пропорциях ромбовидные наугольники для одного и того же объема дают наименьшую поверхность.

Применив метод дифференциального исчисления, Кёниг высчитал (в 1732 году), что ромбы такого наугольника должны иметь углы 109°26′ и 70°34′. Но четыре года спустя Маклорен доказал, что Кёниг допустил в своих подсчетах ошибку и что истинная величина углов ромба 109°28′ и 70°32′.

3. Законы сечения

«Божественная пропорция» — так называли древние и средневековые математики *золотое деление*, или *золотое сечение*, которое в настоящее время сошло со своих олимпийских высот в обыкновенные школьные учебники.

Однако, кроме того, что о золотом сечении известно из учебников, о нем можно сказать еще кое-что.

Золотое сечение отрезка a на две части выражается словами следующим образом: весь отрезок так относится к большей части, как большая часть к меньшей. Отсюда пропорция:

$$a : x = x : (a - x).$$

Эта пропорция дает уравнение второй степени:

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Отсюда получается отношение $\frac{x}{a}$ золотого сечения в виде числа $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, что равно десятичной дроби 0,61804... или также очень необычной цепной дроби:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Отношение, как-никак, очень сложное.

И здесь происходит интересная математическая встреча со знаменитым рядом Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Принимая члены этого ряда за ряд числителей и подписывая под ними те же самые члены, только без первой единицы, как ряд соответствующих знаменателей, получим ряд дробей:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \ldots,$$

в которых, начиная с третьего члена ряда, содержится отношение золотого сечения, выраженное все более и более точно, а именно:

$$\frac{1}{2}=0{,}500 \qquad \frac{13}{21}=0{,}6190$$
$$\frac{2}{3}=0{,}667 \qquad \frac{21}{34}=0{,}6176$$
$$\frac{3}{5}=0{,}600 \qquad \frac{34}{55}=0{,}6181$$
$$\frac{5}{8}=0{,}625 \qquad \frac{55}{89}=0{,}6179$$
$$\frac{8}{13}=0{,}615 \qquad \frac{89}{144}=0{,}61805$$

Золотое сечение, несмотря на свое сложное числовое выражение, является пропорцией, встречающейся в природе чаще всего и чаще всего применяемой в произведениях искусства. В человеческом теле, точнее говоря —

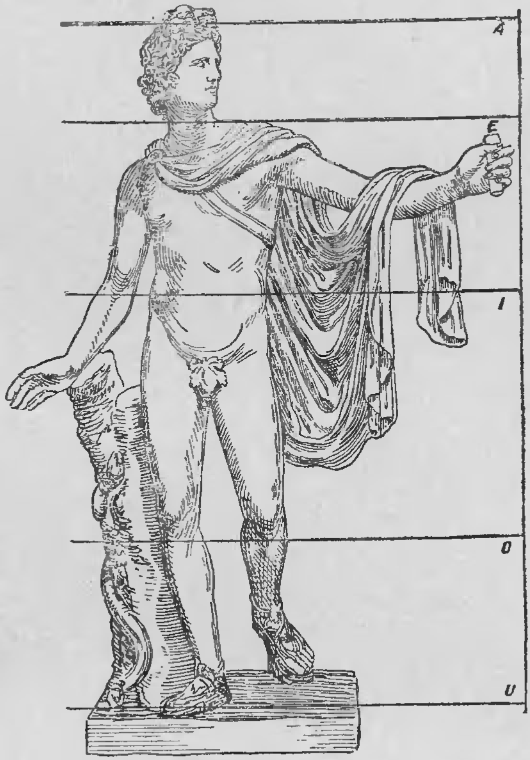


Рис. 304

в строении тела мужчины (которое, по понятиям древних, было совершеннее тела женщины), как все тело, так и некоторые отдельные его части подчиняются законам золотого сечения.

Вот знаменитая скульптура Аполлона Бельведерского, поделенная в отношении золотого сечения (рис. 304).

Линия *1* делит в «божественной пропорции» всю фигуру на две характерные части; линия *E* обнаруживает такое

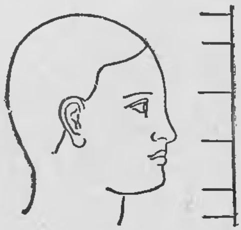


Рис. 305

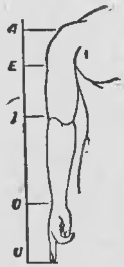


Рис. 306

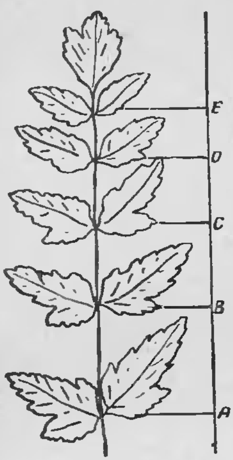


Рис. 307

же отношение головы к верхней части туловища, а линия *O* обозначает деление ног в коленях согласно золотому сечению.

Здесь следует добавить, что если бы мы разделили человеческое тело в той же самой пропорции, по переставляя меньшую часть вниз, а бо́льшую — вверх, то линия деления пришлась бы на концы пальцев свободно свисающих рук.

Деление головы на характерные части дает целый ряд отношений, очень близких золотому сечению (рис. 305). То же самое можно сказать о руке и ладони (рис. 306).

Если перейти от человека к растениям, то и там мы найдем поистине поразительное применение золотого сечения.

Присмотримся к расположению листьев на общем стебельке. Увидим, что между каждыми двумя парами листьев третья лежит в месте золотого сечения (рис. 307).

Рис. 308

Еще более интересные результаты дает исследование расположения листьев на ветках и отдельных веток на стволе. Можно легко заметить, что не все листья расположены друг над другом, скорее наоборот: соседние листья чаще всего не стоят на прямой линии, а как бы окружают ветку. Если от основания одного листка протянуть к основанию второго, третьего и других идущих по очереди листков нитку, то можно убедиться, что нить обвивается вокруг ветки и образует довольно правильную винтовую линию. Это можно видеть ясно на рисунке 308.

Расположение листьев у разных растений ботаникой характеризуется числом оборотов винтовой линии и числом листьев в пределах одного цикла. Циклом же называется расстояние между листьями, расположенными точно один над другим вдоль ветки или стебля. Ради краткости этому отношению придают вид дроби, у которой числителем является число оборотов, а знаменателем — количество промежутков между листьями.

Если, например, от одного листа к лежащему точно над ним другому листу нужно сделать три оборота вокруг ветки и на этом пространстве встретится восемь промежутков, то расположение листьев характеризуется дробью $\frac{3}{8}$.

Легко понять, что такая дробь одновременно выражает и угол расхождения между двумя соседними листьями; например, $\frac{3}{8}$ оборота составляют 135°. Из этого ясно, что дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$ характеризуют тождественное для обоих случаев расположение листьев, так как угол, равный $\frac{3}{8}$ оборота, дополняет до 360° угол, равный $\frac{5}{8}$ оборота. Разные числа образуются по той причине, что в первом случае винтовая линия идет справа налево, во втором же случае — слева направо. Ботаники считают наиболее часто повторяющимися следующие расположения листьев:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \ldots,$$

причем давно уже замечено, что этот ряд характеризуется одной интересной и неожиданной особенностью: каждая дробь (начиная с третьей) образуется из двух предыдущих путем сложения их числителей и знаменателей. Действительно:

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3};\ \frac{3}{8}=\frac{1+2}{3+5};\ \frac{5}{13}=\frac{2+3}{5+8};\ldots$$

Таким образом, достаточно запомнить две первые дроби, чтобы уметь написать весь их ряд.

В чем источник происхождения такой необычной особенности?

Если заменить в этом ряду дроби $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \ldots$ равнозначными в данном случае дробями $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \ldots$, то у нас опять получится в числителях и знаменателях дробей ряд Фибоначчи:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$$

Это значит, что расположение листьев находится в довольно тесной связи с золотым сечением.

Были ученые, которые распространяли свои исследования золотого сечения на взаимные отношения других частей растений и повсюду находили подобную связь пропорций в растительном мире с золотым сечением.

Переходя к исследованиям, которые велись над произведениями искусства, особенно в архитектуре, следует сказать, что и там золотое сечение является самым приятным для глаза отношением размеров частей какого-либо произведения искусства.

Длина архитрава [1] знаменитого греческого Парфенона относится к высоте всего здания, как 1 : 0,618. Ту же

---

[1] **Архитра́в** — главная балка.

постоянную склонность к золотому сечению имеют и другие отдельные части этого шедевра классической архитектуры (рис. 309).

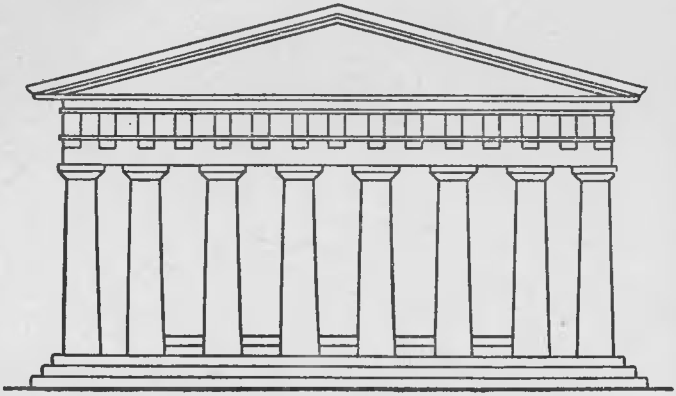


Рис. 309

Золотое сечение, господствуя в природе, также царит и в человеческом глазу, и в человеческом ухе, так как и в музыке можно найти определенные следы этой же золотой пропорции.

VI. ЗАГАДКИ И ОТГАДКИ

1. Числовые звезды

На 16 листах бумаги выпишите 16 последовательных чисел (на каждом листке одно число), начиная от 1, или какой-либо ряд других чисел, лишь бы только в нем не было двух одинаковых чисел. Листки эти надо перетасовать и уложить в форме креста.

```
                  A
                  2
                  1
                  6
                  9
D) 13 15 11 7       14 3 5 10 (B
                 12
                  4
                  8
                 16
                  C
```

Потом попросите четырех человек A, B, C, D, чтобы каждый из них наметил себе в одном из лучей любое число и хорошо его запомнил, не называя его, конечно, вслух.

Отгадывающий собирает листки, причем кладет их незаметно в таком порядке, чтобы все четыре листка, составляющие отдельный луч, лежали в кучке рядом друг с другом и чтобы лучи шли в очередности *A*, *B*, *C*, *D*. Раскладывая вновь листки таким образом, чтобы числа прежнего луча находились во всех четырех лучах прежнего расположения, отгадывающий спрашивает по очереди, в каком луче находится выбранный данным лицом листок, и тотчас безошибочно его находит.

A

15

4

3

1

D) 13 12 14 2 6 5 8 11 (*B*

9

10

16

7

C

Минуты самостоятельного размышления достаточно, чтобы, сопоставив два приведенных здесь расположения, понять, на чем основывается этот довольно эффектный фокус. Мы же от дальнейших объяснений воздержимся. Добавим только, что этот фокус будет иметь еще больший успех, если вместо четырехконечной звезды возьмем пяти-, шести- или восьмиконечную звезду. При этом следует помнить, что число листков, а следовательно, и число написанных на них чисел должны равняться квадрату числа лучей (25, 36, 64), чтобы в каждом луче лежало столько листков, сколько звезда имеет лучей.

2. Комета из спичек

После размещения 24 спичек таким образом, как это указано на рисунке 310, нужно попросить кого-либо из присутствующих задумать произвольное число (конечно, не слишком большое) и начать считать от хвоста, то есть от спички *a*, в направлении, указанном стрелкой, до задуманного числа, а затем от этого числа считать назад к единице уже по окружности самой звезды. Можно, не зная задуманного числа, заранее и точно предсказать, на какой спичке он остановится.

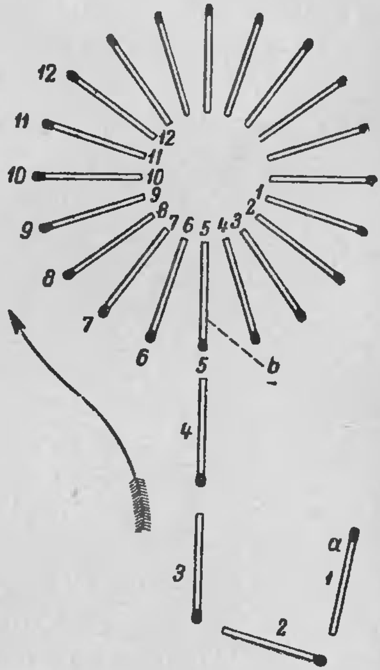


Рис. 310

Числа, написанные около спичек, объясняют эту шутку для задуманного числа 12. Не составляет труда переделать этот пример и для других чисел. Длину хвоста и количество спичек в голове кометы при каждом повторении фокуса следует изменять, чтобы присутствующие сразу не разгадали очень простой принцип этого фокуса.

3. «Лестница» чисел

Пусть кто-нибудь задумает любое число между 1 и 10, помножит задуманное на 3 и к произведению прибавит 9, а затем, начиная от задуманного числа, пусть мысленно считает до числа, полученного в результате умножения и сложения.

В это время отгадывающий будет по мере счета показывать на «лестнице» разные цифры. В тот момент, когда отгадывающий услышит: «Стой», означающее, что подсчет окончен, он покажет на «лестнице» именно первоначально задуманное число.

Лучше всего это объяснит пример.

Рис. 311

Предположим, что кто-нибудь задумал число 5, умножил его на 3, прибавил 9. В результате этих действий получилось 24. Затем мысленно начинает считать от 5 дальше: 6, 7, 8, 9, 10, ... до 24, причем этот подсчет сопровождается ритмичными движениями руки — по одному движению для каждого числа. При первых девяти движениях считающего отгадывающий показывает карандашом на «лестнице» (рис. 311) разные, совершенно произвольные числа, но при десятом движении показывает карандашом на нуль, стоящий перед единицей, и потом последовательно сходит по «ступенькам» вниз, а именно:

на	движение	10 (число 15)	показывает	0, стоящий перед 1
»	»	11 (число 16)	»	1
»	»	12 (число 17)	»	0, стоящий перед 2
»	»	13 (число 18)	»	2
»	»	14 (число 19)	»	0, стоящий перед 3

и т. д.

После девятнадцатого движения, которое отвечает числу 24 в уме считающего, он говорит: «Стой» — и тогда отгадывающий показывает точно на задуманное первоначально число 5. Принцип этой интересной загадки так прост, что не нуждается ни в каких пояснениях.

4. Как выплатить требуемую сумму, не открывая конвертов с деньгами

В девяти заклеенных конвертах (рис. 312) находятся в общей сложности 300 рублей. Предложите кому-либо из присутствующих назвать какую угодно сумму в целых

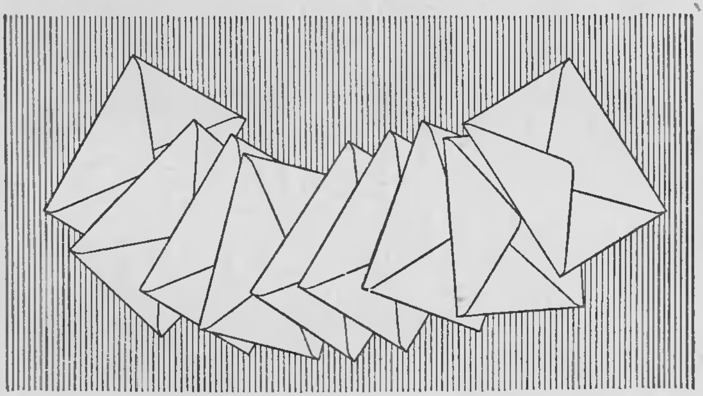


Рис. 312

числах (разумеется, меньшую 300 рублей). Вы сможете выплатить ее, не открывая ни одного конверта.

Допустим, кто-нибудь потребовал 213 рублей. Подаете ему пять конвертов, которые затем присутствующие вскрывают и находят поочередно:

$$128 + 64 + 16 + 4 + 1 = 213 \text{ рублей.}$$

Другой из присутствующих пожелал получить 293 рубля. Тогда вы сами даже не выбираете конвертов, только поручаете кому-нибудь взять три из лежащих друг на друге девяти конвертов; в оставшихся шести находится желаемая сумма.

Это очень эффектный фокус, основанный в то же время на очень простой идее. Заключается она в том, что различные суммы размещаются в этих девяти конвертах особым образом. А именно, нужно в восьми конвертах разложить деньги таким образом:

Конверт I — 1 рубль
» II — 2 рубля
» III — 4 рубля
» IV — 8 рублей
» V — 16 рублей
» VI — 32 рубля
» VII — 64 рубля
» VIII — 128 рублей

В конверте IX, который, чтобы не распознали сразу порядок расположения конвертов, можно положить над конвертом I, или между IV и V, или в другом месте, помещаются все остальные деньги, то есть 45 рублей.

Этот фокус основан на том, что из разных степеней числа 2 можно составить любое число, не превышающее сумму этих степеней. Распределенные же по восьми конвертам суммы действительно составляют ряд:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,$$

а, значит, из содержимого восьми конвертов можно составить любое требуемое число от 1 до 255. Если же названное число превышает 255, то для расчетов употребляется конверт IX, содержащий 45 рублей.

5. Отгадывание стертой цифры

В первой части этой книги приводился целый ряд такого рода фокусов, основанных на признаках делимости чисел на 9. Здесь мы приведем более сложные примеры, в которых будут использованы признаки делимости на 9, 11, 99, 101. Для краткости придадим этим задачам категорическую форму.

1. Напишите совершенно произвольное число, в начале и конце его припишите по нулю; теперь суммируйте, начиная с правой стороны, первую цифру со второй, вторую с третьей, третью с четвертой и так далее, и в полученном таким путем новом числе сотрите незаметно одну цифру, а я ее отгадаю.

Пример: 7923; приписываем нули: 079230 — и складываем последовательно $0+3=3$, $3+2=5$, $2+9=$ $=11$ (пишем 1, а 1 десяток прибавляем к следующей сумме), $9+7+1=17$ (7 пишем, а 1 десяток прибавляем к следующей сумме), наконец $7+0+1=8$. Получим 87 153. В этом числе заменим цифру 5 звездочкой: 871*3.

Как отыскать эту цифру?

Итак, наше суммирование цифр парами было умножением данного числа на 11, как это видно из записи:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 79\,230 \\ 7\,923 \end{array} \\ \hline 87153 \end{array}$$

Полученное число, конечно, делится на 11.

А признак делимости числа на 11 состоит в том, что сумма цифр, стоящих на нечетных местах, и сумма цифр, стоящих на четных местах (выдвигаем их из ряда), одинаковы или разнятся на число, делимое на 11; например:

$$\begin{array}{rr} 813 & 8+1+3=12 \\ 75 & 7+5=12 \end{array}$$

Если стереть одну цифру, получим:

$$\begin{array}{c} 813 \\ 7* \end{array}$$

Подбираем числа таким образом, чтобы было $8 + 1 + 3 = 7 + *$; но $12 = 7 + *$, откуда $* = 5$.

---

2. Помножьте выбранное вами число на 13, произведение возведите в квадрат, отнимите от него квадрат удвоенного первого выбранного числа, а в полученной разности сотрите произвольную цифру, а я тотчас вам ее назову.

Пример: пусть будет выбрано число 3. Выполним действия:

$13 \cdot 3 = 39$; $39^2 = 1521$; $2 \cdot 3 = 6$; $6^2 = 36$;
$1521 - 36 = 1485$;
$14*5$; $1 + * = 4 + 5$; $* = 8$.

Вот вариант предыдущей задачи.

Возьмите какое-нибудь число и помножьте его на 7, возведите произведение в квадрат, вычтите из него квадрат учетверенного первого выбранного числа и сотрите из результата какую-нибудь цифру, а я ее отгадаю.

Пример: если вы выбрали число 3, то

$7 \cdot 3 = 21$; $21^2 = 441$; $4 \cdot 3 = 12$; $12^2 = 144$;
$441 - 144 = 297$;

$$*97,\ * + 7 = 9;\ * = 2.$$

Принцип этой загадки, как и в предыдущем случае, основан на преобразовании задуманного числа в число, кратное 11.

Действительно, если задуманное число обозначить N, то, согласно требованиям задачи, должны быть выполнены следующие действия:

$$13^2N^2 - 2^2N^2 = (13^2 - 2^2)\,N^2 = (13 - 2)\ (13 + 2)\,N^2 = 11\,(13 + 2)\,N^2.$$

Или:

$$7^2N^2 - 4^2N^2 = (7^2 - 4^2)\,N^2 = (7 + 4)\ (7 - 4)\,N^2 = 11\,(7 - 4)\,N^2.$$

3. Напишите произвольное число, приписывая к нему в начале и в конце по два нуля; вычитайте теперь поочередно третью цифру (начиная с правой стороны) из первой, увеличенной в случае необходимости на 10, четвертую из второй, пятую из третьей и т. д. Из этих разностей образуется новое число. Замените в нем какую-либо цифру звездочкой и покажите мне, что получилось.

Например: 647; приписываем нули: 0064700;

$$10 - 7 = 3;\ 9 - 4 = 5;\ 6 - 6 = 0;\ 4 - 0 = 4,\ 6 - 0 = 6;$$

64053; 6405 *.

Предлагаемое вычитание последовательных цифр приводит окончательно к такому вычитанию:

$$\begin{array}{r} -\,64\,700 \\ 647 \\ \hline 64\,053 \end{array}$$

Число 647 было помножено на 100—1, то есть на 99, а значит, в результате вычислений получаем число, делимое на 99, поэтому это число должно делиться на 9 и на 11.

Имея данное число, мы должны так подобрать *, чтобы сумма цифр делилась на 9; очевидно, * = 3.

Некоторое затруднение получается, когда стирается цифра 0 или цифра 9; например, если бы было дано 64*53. Подбирая * так, чтобы число делилось на 9, мы попали бы в затруднительное положение, так как не смогли бы решить, была ли стерта девятка или нуль. В таких случаях на помощь приходит то обстоятельство, что все число должно делиться на 11. Таким образом, имеем:

$$\begin{matrix} 6*3 \\ 45 \end{matrix}$$

и решаем уравнение:

$$6 + * + 3 = 4 + 5, \text{ то есть } 9 + * = 9.$$

Отсюда безусловно получаем:

$$* = 0.$$

4. Напишите произвольное число с нечетным количеством цифр. Напишите это же самое число в обратном порядке. Получите другое число. Меньшее вычтите из большего. Умножьте полученную разность на произвольное число и в полученном произведении сотрите две цифры с соблюдением двух условий: 1) чтобы ни одна из них не была нулем, 2) чтобы одна из них стояла на четном, а другая — на нечетном месте. Обе цифры отгадаю!

Секрет состоит в том, что после выполнения указанных операций мы получаем число, делящееся на 99. В самом деле, пусть будет дано число, например пятизначное:

$$10000a_1 + 1000a_2 + 100a_3 + 10a_4 + a_5.$$

Вычитая из него «перевернутое» число, получаем в результате:

$$9999(a_1 - a_5) + 990(a_2 - a_4).$$

Следовательно, это будет число, делящееся на 99.

Пример: 85 241; 14 258; 85 241 — 14 258 = 70 983.

Возьмем за множитель 23; 23 · 70 983 = 1 632 609.

Сотрем цифры, стоящие на первом и четвертом местах: $163x60y$. Полученное число должно делиться на 99. Признак делимости на 99 подобен признаку делимости на 9 с той только разницей, что в случае делимости на 99 сумма двузначных частей числа, считая справа налево, должна делиться на 99.

Пишем $163x60y$. Сумма $1 + 63 + (10x + 6) + y$, или $10x + y + 70$ должна делиться на 99. Отсюда $x = 2$, $y = 9$.

6. Отгадывание остатка от деления неизвестных чисел

1. Выберите себе трехзначное число и напишите его два раза, чтобы получилось шестизначное число. Прибавьте к нему число a и помножьте сумму на число b. Разделите произведение на 143, а в конверте, который я вам дам, найдете остаток от этого деления.

Пример: 257; 257257; $a = 23$; $257257 + 23 = 257280$; $b = 17$; $17 \cdot 257280 = 4373760 : 143$ дает остаток 105.

Остаток получается от деления произведения $17 \cdot 23 = 391$ на 143, поскольку первое выбранное число 257 257, будучи кратным 1001, является также кратным 143.

Отгадывающий может, конечно, в качестве чисел a и b назвать не только 23 и 17, но и всякие другие числа, только предварительно проверив, какой остаток получится от деления их произведения на 143.

---

2. Выберите какое-либо число (только оно обязательно должно быть простым числом и притом большим 3). Возведите его в квадрат. Прибавьте, например, 162 и раз-

делите на 12. Остаток, который получится от деления, я могу написать заранее: 7.

Загадка эта опирается на следующие предпосылки: каждое простое число N, большее 3, принадлежит к типу $6k \pm 1$, поскольку оно не есть ни четное число, ни число, делимое на 3. Его квадрат, следовательно, будет иметь вид:

$$N^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1$$

и, значит, при делении на 12 даст остаток 1. Если прибавить к квадрату число 162, то получится:

$$N^2 + 162\ (\text{кратное } 12) + 7.$$

Разумеется, вместо 162 можно прибавлять любое другое число, найдя предварительно остаток, который получится, если это число увеличить на 1 и разделить на 12.

7. Отгадывание результата действий над неизвестными числами

1. Напишите выбранное число посредине между шестью нулями и затем суммируйте, начиная с правой стороны, первую цифру с четвертой, вторую с пятой, третью с шестой и т. д. Получите таким путем новое число, значительно большее, чем предыдущее. Разделите его на увеличенное в 7 раз первоначальное число и убедитесь, что я напишу частное раньше, чем вы успеете кончить эти действия.

Разгадка основана на том, что вследствие всех этих суммирований отдельных цифр мы получаем число, которое будет кратно числу 1001. От деления числа 1001 на 7 всегда должно образоваться частное 143.

Пример: 73 864; 00 073 864 000; $0 + 4 = 4$; $0 + 6 = 6$; $0 + 8 = 8$; $4 + 3 = 7$; $6 + 7 = 13$ (цифру 1 прибавить к следующей сумме): $8 + 0 + 1 = 9$; $3 + 0 = 3$;

$7 + 0 = 7$; 73 937 864; $7 \cdot 73\,864 = 517\,048$;

$$73\,937\,864 : 517\,048 = 143.$$

2. Возьмите на этот раз три отдельные цифры и образуйте из них шесть двузначных чисел таким образом, чтобы ни в одном из них цифры не повторялись. Найдите сумму шести этих чисел и разделите ее на сумму выбранных трех цифр. Окончательный результат всех этих действий я буду знать раньше вас.

Числа, составленные из комбинации выбранных трех цифр, назовем *циклами* этих цифр.

Итак, мы имеем три цифры: A, B, C. Составим из них шесть чисел:

$$AB, \text{ или } A \cdot 10 + B,$$
$$AC, \text{ или } A \cdot 10 + C,$$
$$BC, \text{ или } B \cdot 10 + C,$$
$$BA, \text{ или } B \cdot 10 + A,$$
$$CA, \text{ или } C \cdot 10 + A,$$
$$CB, \text{ или } C \cdot 10 + B.$$

Сумма этих чисел составляет:

$$2(A + B + C) \cdot 10 + 2(A + B + C), \text{ или } 22(A + B + C).$$

Конечно, эта сумма, деленная на сумму цифр $A + B + C$, должна дать в частном всегда то же самое число 22.

Пример: 2, 5, 7; $25 + 52 + 27 + 72 + 57 + 75 = 308$; $2 + 5 + 7 = 14$; $308 : 14 = 22$.

Если составить из трех цифр не шесть, а девять чисел, то есть если к указанным ранее шести числам прибавить еще числа AA, BB, CC, то сумма этих девяти чисел, деленная на сумму цифр, даст в частном 33.

Чтобы эта задача показалась более трудной, можно полученную сумму чисел помножить на какое-либо число k, например на 3, на 7, на 13. Тогда искомое число также увеличится в k раз.

3. Напишите произвольное трехзначное число n. Помножьте его на 37. Прибавьте к произведению число a. Помножьте полученную сумму на 27 и прибавьте число b. Поделите эту сумму на трехзначные отрезки, начиная с правой стороны, и я скажу, какой будет сумма этих отрезков.

Алгебраически эта задача представится в таком виде:

$$S = 27(37n + a) + b = 999n + 27a + b,$$

причем S — шестизначное число.

Каждое число, большее трехзначного, равняется числу, кратному 999, увеличенному на сумму трехзначных отрезков этого числа, взятых с правой стороны. Следовательно, сумма этих отрезков будет в данном случае составлять $27a + b$.

Пример: взято число 324; $37 \cdot 324 = 11\,988$; $a = 13$; $11\,988 + 13 = 12\,001$; $27 \cdot 12\,001 = 324\,027$; $b = 41$; $324\,027 + 41 = 324\,068$; $068 + 324 = 392 = 27a + b = 27 \cdot 13 + 41$.

Разумеется, для a и b можно подобрать и другие значения.

---

4. Возьмите произвольное число n, умножьте его на число a. К произведению an прибавьте b и от этого же произведения an отнимите b, получите в итоге два числа. Разность их квадратов поделите на первоначально взятое число.

Результат этих действий сравните с результатом моих вычислений.

Алгебраически результат этих действий представляется такой формулой:

$$\frac{(an + b)^2 - (an - b)^2}{n} = 4ab.$$

Пример: 47; $a = 3$; $3 \cdot 47 = 141$; $b = 9$; $141 + b = 150$; $141 - b = 132$; $150^2 = 22\,500$; $132^2 = 17\,424$; $22\,500 - 17\,424 = 5076$; $5076 : 47 = 108$ и одновременно $4ab = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$.

8. Как можно предсказать сумму еще не написанных чисел

Отгадывающий просит, чтобы кто-нибудь из присутствующих написал произвольное пятизначное число. Быстро смотрит на него и немедленно записывает какое-то число на бумажке, прячет бумажку в конверт, заклеивает и отдает его кому-либо из присутствующих. На этой бумажке написана заранее сумма чисел, слагаемые которой, за исключением одного, уже записанного, еще только будут написаны.

Затем отгадывающий обращается к другому из присутствующих с просьбой написать под первым числом какое-либо другое, снова совершенно произвольное число, после чего сам подписывает третье и просит обладателя конверта суммировать числа, вскрыть конверт и убедиться, правильно ли была предсказана сумма неизвестных чисел.

Если кто-нибудь написал, например, первое число 73 265, то отгадывающий пишет на бумажке сумму 173 264. Другой из присутствующих пишет произвольно взятое число 14 382, отгадывающий дописывает 85 617:

I лицо	73 265
II лицо	14 382
Отгадывающий . .	85 617
	173 264

Этот поражающий непосвященных фокус объясняется очень просто. Все дело основано на том, что, прибавляя к произвольному пятизначному числу 99 999, мы увеличиваем это число на 100 000 — 1, то есть получаем число, составленное из тех же самых цифр, что и первоначально взятое, только с дополнительной, стоящей на первом месте единицей и с последующей цифрой, уменьшенной на единицу, то есть

$$73\,265 + 99\,999 = 173\,264.$$

Вот такое число и пишет заранее отгадывающий. Затем, после того как другой из присутствующих напишет второе число, отгадывающий быстро подписывает третье число, каждая из цифр которого будет дополнением до девяти соответствующих цифр второго числа:

$$14\,382 + 85\,617 = 99\,999.$$

Вот и весь фокус. Как видите, он достаточно прост.

9. Моментально вычисленное произведение или частное

Эта загадка основывается на свойствах *круговых* чисел, о которых мы уже писали в книге раньше.

Берем самое простое круговое число 142 857 в качестве множимого и предлагаем кому-нибудь подписать произвольное двузначное или трехзначное число в качестве множителя. Обязуемся почти молниеносно дать произведение и пишем его слева направо сразу после того, как прочли множитель.

Как это делается? Вспомним, что 142 857 является периодом дроби $\frac{1}{7}$. Значит, если написать в качестве множителя какое-нибудь двух- или трехзначное число, например 374, то задача сводится к умножению 374 на $\frac{1}{7}$ и замене полученного произведения периодической дробью.

Сделать это можно таким путем.

Число 374 мысленно делим на 7, получаем $53\frac{3}{7}$ и сразу же приступаем к выписыванию искомого произведения, которое будет начинаться с 53. Остается $\frac{3}{7}$, дающее 3 — кратность периода 142 857.

Вся трудность сейчас состоит в том, чтобы быстро установить порядок цифр того числа, которое образуется из умножения периода на 3. Чтобы установить этот порядок, находим последнюю цифру произведения $3 \cdot 142\,857$. Это будет единица, так как $3 \cdot 7 = 21$.

Теперь уже известно, что следующей после 53 будет стоять цифра, находящаяся в числе 142 857 непосредственно после единицы, то есть цифра 4, а дальше пойдет по порядку 285. Наконец из последних двух цифр (71) следует вычесть стоящее впереди 53. Все произведение, следовательно, будет выглядеть так:

$$53\,|\,4285\,|\,18.$$

Даже при небольшом навыке можно производить такое умножение очень быстро. Приведем здесь еще два примера уже без всяких пояснений.

А. Произведем умножение

$$\times\begin{array}{r}142\,857\\755\\\hline\end{array}$$

Подсчитываем:

$$755 : 7 = 107\,\frac{6}{7}.$$

$6 \cdot 7 = 42$, а после 2 следует 8 — значит, после 107 пишем 857; $142 - 107 = 035$, а, следовательно, произведение будет равняться 107 857 035.

Б. Допустим, что надо умножить

$$\times\begin{array}{r}142\,857\\378\\\hline\end{array}$$

Подсчитываем:

$378 : 7 = 54 = 53\frac{7}{7}$; $7 \cdot 142\,857 = 999\,999$; $99 - 53 = 46$.

Следовательно, произведение равняется 53 999 946.

Чтобы не предлагать в качестве множимого все время одно и то же число 142 857, можно умножить его на какое-нибудь другое число, например на 9, 11 или 13, и предложить полученное число в качестве множимого с таким дополнительным условием:

«Прошу под данным числом подписать произвольный двузначный или трехзначный множитель, числа эти перемножить, а затем полученное произведение разделить на 9 (на 11 или на 13). Раньше, чем вы приступите к выполнению этих действий, я уже начну записывать окончательное частное, причем записывать его буду слева направо».

Понятно, что умножение и затем деление на то же самое число 9 мы можем не принимать во внимание, а искомое на этот раз частное сразу же записывать совершенно таким же способом, каким записывали раньше произведение.

10. Отгадывание чисел, возведенных в квадрат, а также быстрое извлечение корней

1. Задумайте какое-нибудь число, большее 7, прибавьте к нему 7 и возведите сумму в квадрат, затем из задуманного числа вычтите 7 и возведите разность в квадрат. Из первого квадрата вычтите второй и прибавьте 17. Скажите мне окончательный результат, а я скажу, какое число вы задумали.

Вместо чисел 7 и 17 можно взять произвольные числа a и b.

Равенство

$$(n + a)^2 - (n - a)^2 + b = 4an + b$$

полностью обнаруживает сущность загадки: надлежит от полученного числа отнять b и разность разделить на $4a$.

Например:

$$13 \cdot a = 7; \quad 13 + a = 20; \quad 13 - a = 6; \quad 20^2 = 400;$$
$$6^2 = 36; \; b = 17.$$
$$400 - 36 + 17 = 381; \quad 381 = 4an + b; \; 381 - b = 364;$$
$$4a = 28; \; 364 : 28 = 13.$$

2. Помножьте задуманное число на его квадрат, уменьшенный на единицу. Скажите мне произведение, и я найду задуманное число.

Вот способ отгадывания:

$$p = n(n^2 - 1) = n^3 - n.$$

Поскольку $(n - 1)^3 < n^3 - n < n^3$,

то $$n - 1 < \sqrt[3]{p} < n.$$

Число n должно быть немного больше корня кубического из произведения p; это позволяет нам его отыскать.

Если, например, $n = 7$, то $n^2 = 49$, $p = n(n^2 - 1) = 7 \cdot 48 = 336$. Имея данное произведение 336, утверждаем, что $6^3 = 216 < 336$, а $7^3 = 343 > 336$; значит, $n = 7$.

VII. ГЕОМЕТРИЯ ГНУТОГО ЛИСТА, ЛЕНТЫ И ПАРКЕТНОЙ ПЛИТКИ

1. Плоские фигуры из изогнутого листа

Перочинный нож, булавка для обозначения точек и гладкий белый лист бумаги в умелой руке могут дать урок геометрии без пояснений на словах.

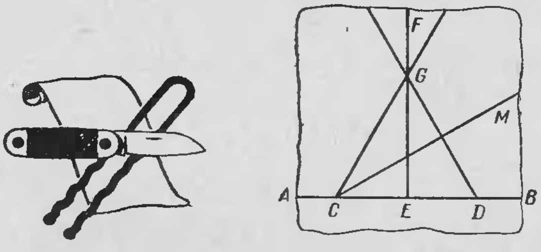


Рис. 313

Запаситесь этими нехитрыми материалами и проделайте сначала все простейшие опыты, ход которых не стоит даже пояснять: сделайте посредством сгибания бумаги прямую линию, перпендикуляр, параллельную прямую, квадрат, прямоугольник, равнобедренный треугольник. Все это можно чрезвычайно легко сделать, несколько раз перегнув лист бумаги (рис. 313).

Несколько труднее получить *равносторонний треугольник.*

Согнув в каком-либо направлении край листа бумаги, имеющего неправильную форму, получим основание AB треугольника. Затем сгибаем лист пополам по линии EF и по обе стороны от точки E накалываем вершины C и D. Оставляя неподвижную точку C, перегибаем лист вдоль некоторой линии CM таким образом, чтобы точка D точно легла на линию EF; получаем точку G, которая будет третьей вершиной искомого равностороннего треугольника. Теперь уже легко можно будет сделать сгибы сторон CG и DG.

Построение *правильного пятиугольника* посредством сгибания требует построения вспомогательных фигур. Вырежем из бесформенного листа (всегда посредством сгибания) прямоугольник $EFCD$ (рис. 314), у которого стороны будут относиться, как $2:3$.

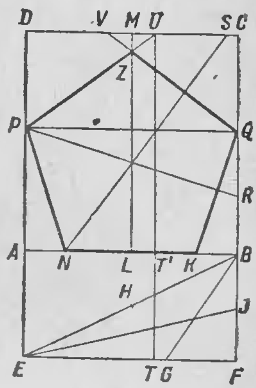


Рис. 314

Ширину его $EF = PQ$ будем считать за величину диагонали будущего пятиугольника.

Вспомним, что сторона правильного пятиугольника образуется как больший отрезок его диагонали, поделенной согласно золотому сечению. Следовательно, первая трудность, и притом довольно серьезная, состоит в отыскивании (посредством только сгибаний листа) точки, которая делит отрезок AB в отношении золотого сечения.

Для этой цели следует отделить верхнюю часть прямоугольника, данного нам в виде квадрата $ABCD$ линией AB; нижняя часть $ABFE$ будет служить вспомогательной фигурой, причем, очевидно, $AE = \frac{1}{2}AB$. В данном вспомогательном прямоугольнике диагональным сгибом обозначим линию BE. Затем, оставляя неподвижной точку B, сгибаем угол листа так, чтобы BF пошло по BE; это даст нам прямую BG, а также точку H, в которой F ляжет на BE. Наконец, снова оставляя неподвижной точку E, сгибаем лист вдоль EI так, чтобы линия EF совместилась с линией BE.

В месте, где точка H совпадает с EF, обозначим точку T. Отрезок ET и будет искомой стороной пятиугольника.

Восстанавливая посредством сгибания перпендикуляр из точки T, получим точку T'.

Дальше уже легко найдем, проведя ось симметрии LM, вершину K, как середину отрезка $T'B$, а затем $LN = LK$. Оставляя неподвижной точку N, сгибаем лист по линии NS так, чтобы точка K оказалась на AD.

Таким путем найдем третью вершину искомого прямоугольника, а именно P. Отыскивание остальных сторон и вершин не требует указаний.

Намного легче будет вписать в равносторонний треугольник *правильный шестиугольник* (рис. 315).

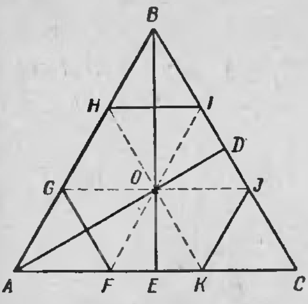


Рис. 315

Достаточно провести две оси симметрии AD и BE, а затем к найденному на их пересечении центру O пригнуть все три вершины A, B и C треугольника.

Несколько сложнее построить правильный шестиугольник на квадратном листе (рис. 316).

Складывая квадратный лист $ABCD$ вчетверо вдоль прямой EF и затем вдоль прямой GK, в результате получаем квадратик $OGCF$.

Построим известным уже нам способом на основании OF треугольника равносторонний треугольник OFH. За-

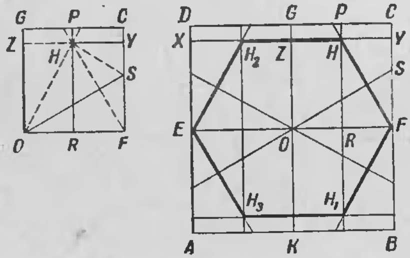


Рис. 316

тем в точке H делаем загиб ZY, параллельный GC. Когда расправим весь лист, получим шестиугольник $FH_1H_3EH_2H$.

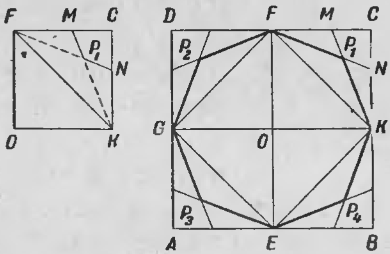


Рис. 317

Подобным способом можно на квадратном листе построить *правильный восьмиугольник*, приводя большой квадрат $ABCD$ к маленькому квадрату $OKCF$ (рис. 317) или к треугольнику OFC (рис. 318). Приведенные рисунки не требуют никаких дальнейших пояснений.

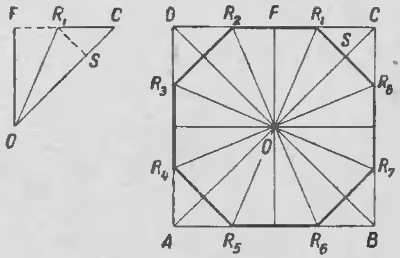


Рис. 318

Третий вариант решения этой же задачи дает очень красивую фигуру — восьмиконечную звезду, описанную около восьмиугольника (рис. 319).

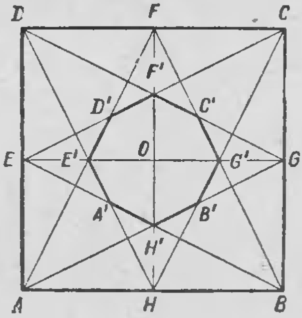


Рис. 319

В этом случае за сторону квадрата мы принимаем отрезок, равный двойному диаметру окружности, описанной около этого искомого восьмиугольника. Соответствующее сгибание листа не представляет никакой трудности.

Правильный десятиугольник нетрудно получить из правильного пятиугольника или построить его непосредственно по принципу золотого сечения.

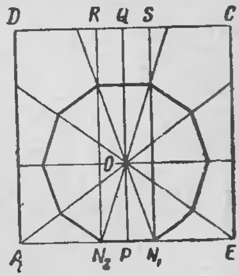


Рис. 320

Описанным ранее способом получаем точку N — точку золотого сечения стороны AE (рис. 320). От оси симметрии PQ откладываем $PN_2 = PN_1$. Затем, оставляя точку E неподвижной, изгибаем угол листа с вершиной A таким образом, чтобы A попало на PQ. Произойдет это в точке O, которая будет центром искомого десятиугольника. Отыскивание остальных вершин не представляет уже никаких особых трудностей.

2. Построение правильных многогранников

Как при помощи сгибаний листа построить четырехгранник или шестигранник, этому никого учить не надо.

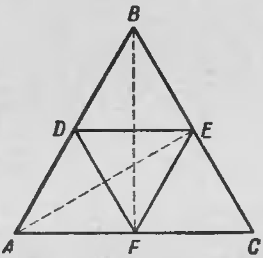


Рис. 321

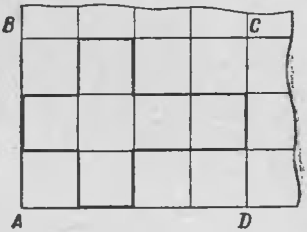


Рис. 322

Вполне достаточно дать схему этих многогранников (рис. 321, 322).

Несколько труднее будет построить *правильный восьмигранник.*

Начать следует с построения равностороннего треугольника ABC (рис. 323).

На одной стороне листа бумаги выкраивают стороны AB и AC треугольника, а затем треугольник сгибается три раза так, чтобы он повернулся на 180° вокруг линий CB, CD и CE, причем бумага перегибается поочередно вдоль линий BD, DE и CF. Наконец полученная фигура $ABDEFC$ разгибается и вся целиком поворачивается на оси FE так, чтобы она легла на остальную часть листка. Дальше уже без труда можно получить линии ED', $D'B'$, $B'A'$, $A'C'$ и $C'F$.

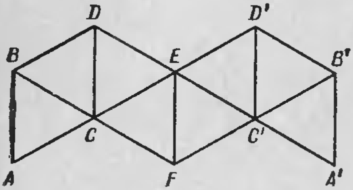


Рис. 323

Правильный двенадцатигранник можно построить двумя способами. Первый способ заключается в следующем.

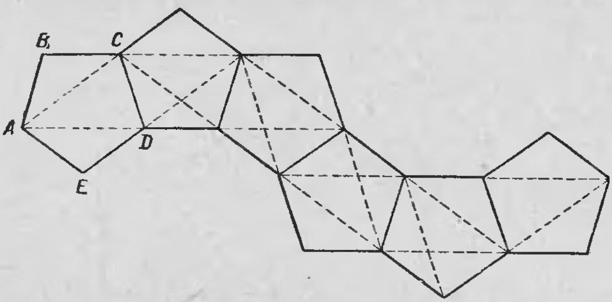


Рис. 324

Получив на одном конце довольно широкой бумажной ленты правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 324), нужно его отложить несколько раз, как это показано на рисунке, а затем из этого листа вырезать по такому же образцу вторую гирлянду совершенно одинаковых пятиугольников и сложить обе гирлянды вместе.

Второй способ намного красивей.

Складываем пополам листок бумаги и вырезаем из него большой правильный пятиугольник $HKLMN$ (рис. 325) таким образом, чтобы одна из сторон LM оказалась на линии перегиба.

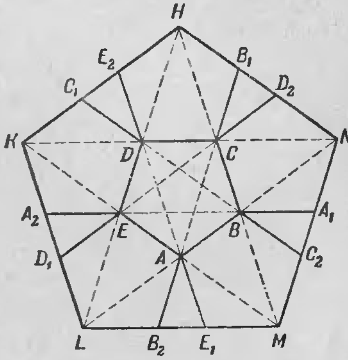


Рис. 325

Затем строим внутри этого пятиугольника пентаграмм посредством ряда очень несложных сгибаний, в середине которого образуется новый пятиугольник $ABCDE$, составляющий грань искомого додекаэдра. В этот маленький пятиугольник снова вписываем пентаграмм, чтобы на продолжении его лучей получить A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и т. д. Наконец вырезаем треугольники A_1BC_2, B_1CD_2, C_1DE_2, D_1EA_2,

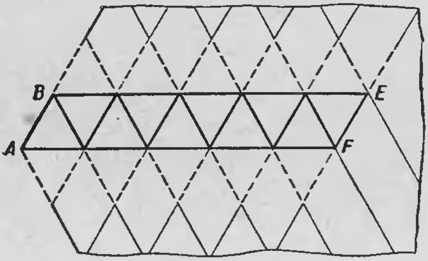


Рис. 326

E_1AB_2 — двенадцатигранник будет почти готов; достаточно разрезать листок по линии LM, обе половины перевернуть и придать граням соответствующий взаимный наклон.

Правильный двенадцатигранник — это опять-таки фигура, очень легкая для вырезывания; рисунок 326 достаточно объясняет дело.

3. Вязка бумажной ленты

С бумажной лентой, имеющей прямые параллельные края, можно проделывать много интересных перегибаний, связываний и других фокусов.

Образовать равносторонний треугольник из бумажной ленты очень просто. Обрезаем один конец ленты по линии AB (рис. 327), перпендикулярной к краям ленты, складываем ее пополам и посредством этого получаем линию CD. Оставляя неподвижной вершину A, вращаем точку B до тех пор, пока она не попадет на прямую CD, что произойдет в точке E; линия сгиба AF даст нам точку F.

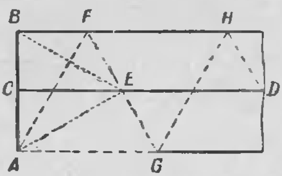


Рис. 327

Сгибая затем ленту по FE, получим третью вершину треугольника — G. Второй равносторонний треугольник, FGH, образуется посредством еще одного перегиба ленты вдоль FG.

Так же легко можно получить равносторонний треугольник со стороной AB, сгибая ленту по линиям AE и BE.

Квадрат можно легко образовать у конца одной ленты или если сложить две ленты одинаковой ширины и обрезать концы (рис. 328).

Очень легко вяжется лента в правильный пятиугольник; достаточно присмотреться к рисунку 329.

Когда узел будет уже стянут и выровнен без какого-либо перегиба бумаги, следует обрезать оба конца, и получится правильный пятиугольник $ABCDE$. Чтобы показать,

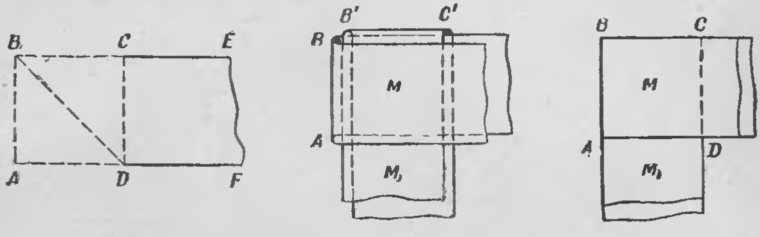


Рис. 328

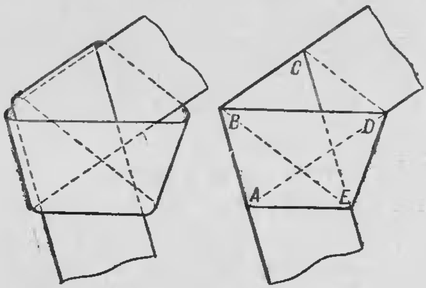


Рис. 329

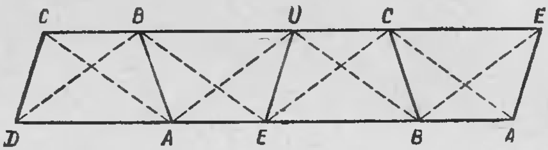


Рис. 330

что пятиугольник действительно правильный, надо узел «развязать». Получится ряд трапеций, равенство которых нетрудно доказать (рис. 330).

Для вязки правильного шестиугольника употребляются две ленты одинаковой ширины. Эта манипуляция также, как это видно из рисунка 331, очень простая.

Правильность данной фигуры обнаруживают, как и в предыдущем случае, с помощью трапеций, на которые распадаются оба куска ленты (рис. 332).

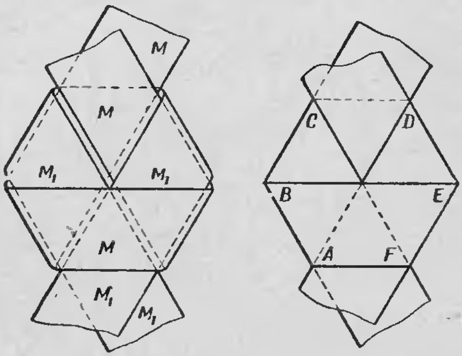


Рис. 331

Геометрией гнутого листа занимался уже в XVII веке итальянский математик Урбано де Авизо.

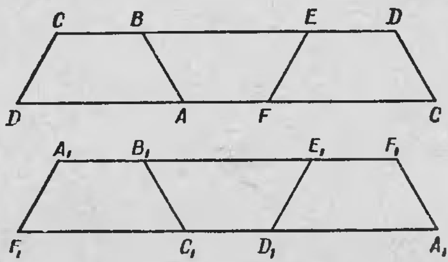


Рис. 332

Ему также принадлежит идея связывания ленты в форме пятиугольника и шестиугольника. После него, только в конце XIX века, небольшие работы, посвященные специально этому вопросу, написал индиец Сундара Рау и немец М. Г. Винер, который специально разработал построение правильных многогранников.

4. Ленты простые и ленты необычные

Возьмем ровную и довольно широкую ленту бумаги. Если склеить ее концы, как показано на рисунке 333, *1*,

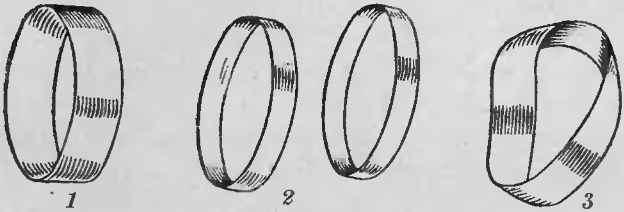


Рис. 333

разрезать ее вдоль, то мы получим два бумажных кольца (рис. 333, *2*).

Но если один из концов той же ленты перед склеиванием перевернем на 180° (рис. 333, *3*), то тогда получится круг,

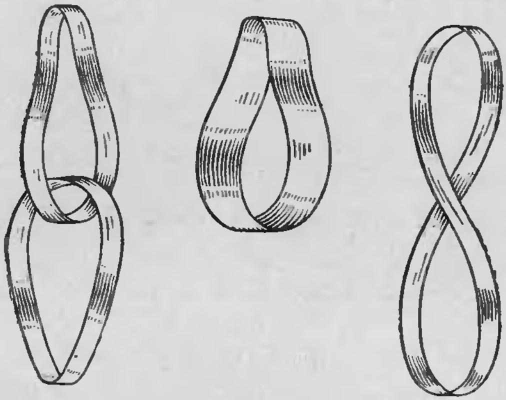


Рис. 334, *1*, *2*, *3*

завязанный поистине удивительным узлом. Лента, переплетенная таким образом, не будет иметь ни низа, ни верха; невозможно будет определить, где кончается «лицевая сторона» и начинается «изнанка», или наоборот. Лучше всего в этом можно убедиться, пытаясь закрасить только «верх» ленты. Такая поверхность называется *односторонней поверхностью Мёбиуса.*

Попробуйте разрезать эту ленту вдоль. Получится только один бумажный круг, сплетенный другим образом (рис. 334, *1*). Форма ленты будет такой же, как и у широкой ленты на рисунке 334,*2*, у которой перед склеиванием конец был повернут на 360°.

Если такую ленту разрезать, мы получим два круга, соединенные, как звенья цепи (рис. 334, *3*). Если вы захотите разрезать еще и еще раз эти сцепленные полосы, то получите уже гордиевы узлы, которые невозможно развязать. Но можно эти ленты разрезать... поперек, и на этом вся забава кончится.

5. Укладывание паркета

Многим читателям покажется удивительным, что дощечки паркета или плитки, по которым они каждый день проходят в разных вестибюлях, коридорах, могут быть предметом математических рассуждений.

Формы этих плиток обычно очень просты, а их комбинации редко поразят оригинальностью. А все-таки стоит хотя бы на минутку задержать внимание на связи паркета с математикой.

Обычно здесь мы имеем дело с правильными треугольниками, квадратами, шестиугольниками, восьмиугольниками и двенадцатиугольниками.

Вот несколько чаще всего встречаемых комбинаций (рис. 335):

1. Из плиток двух форм: треугольников и шестиугольников, квадратов и восьмиугольников, треугольников и квадратов.

2. Из плиток трех форм: треугольников, квадратов и шестиугольников.

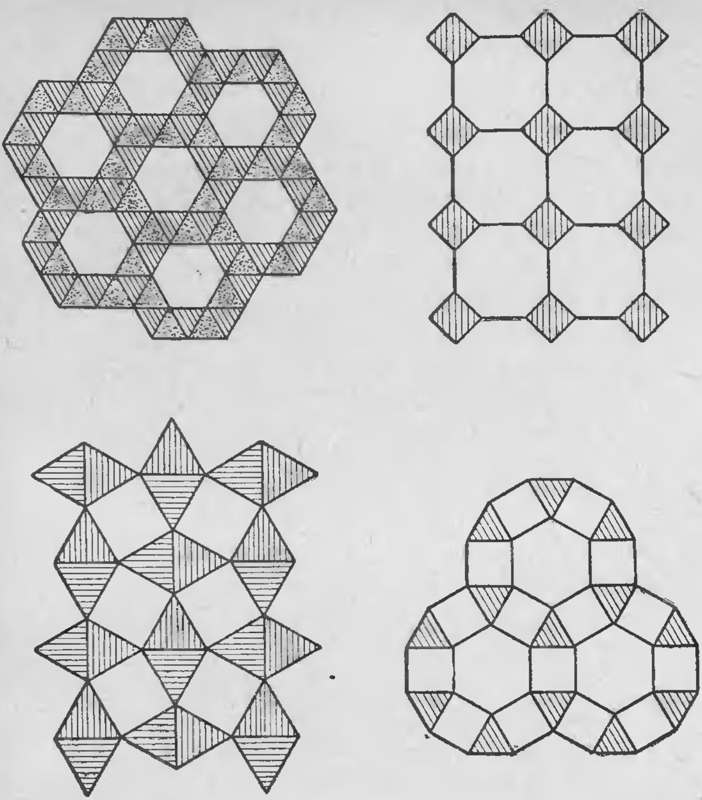


Рис. 335

Мы уже знаем, что Пифагор должен был первый определить, что плоскость в окрестностях какой-нибудь точки полностью, без пропусков, может быть заполнена только тремя видами правильных многогранников: треугольниками, квадратами или шестиугольниками. Однако в данном случае мы пойдем несколько дальше и рассмотрим, какими комбинациями разных правильных многоугольников можно заполнить без щелей и пропусков плоскость вокруг этой точки.

Обозначим через n число сторон многоугольника, тогда сумма всех внутренних углов будет составлять $(n-2)\cdot 180°$, а каждый угол будет равен $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

Чтобы можно было сгруппировать вокруг какой-то точки определенное число разных правильных многоугольников, необходимо, чтобы сумма их углов, сходящихся в данной точке, равнялась точно четырем прямым углам. Наименьшее число многоугольников, какое можно сгруппировать в данной точке плотно, без щелей, покрывая ими плоскость, равно 3, наибольшее же — 6.

Допустим, что первый тип этих фигур насчитывает n_1 сторон, второй — n_2, третий — n_3, причем $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$. Тогда соответствующие внутренние углы будут равны:

$$\frac{(n_1-2)\cdot 180°}{n_1}; \quad \frac{(n_2-2)\cdot 180°}{n_2}; \quad \frac{(n_3-2)\cdot 180°}{n_3},$$

а их сумма, по одному углу из каждого многоугольника, будет составлять:

$$\left[\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right]\cdot 180°.$$

Сумма эта должна быть равна 360°. Отсюда вывод, что

$$\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}=2,$$

что после преобразования дает:

$$3-\left(\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}+\frac{2}{n_3}\right)=1$$

и окончательно:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Самым простым правильным многоугольником будет, конечно, треугольник.

Поэтому условимся, что $n_1 = 3$, и попытаемся установить, какой еще многоугольник можно связать в одной точке с треугольником.

Тогда вышеприведенное равенство будет выглядеть так:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}.$$

Откуда

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6},$$

при этом $6 \leqslant n_2 \leqslant 12$, так как при $n_2 \leqslant 6$ для n_3 получается значение 0 или отрицательное число, а при $n_2 > 12$ нельзя соблюсти условие, чтобы $n_3 > n_2$, потому что угол правильного двенадцатиугольника насчитывает 150°, а угол равностороннего треугольника имеет 60°, что даст в сумме 210°; значит, 360° — 210° = 150°. Самым большим поэтому значением для n_2 может быть 12.

На основе этих положений можно установить, что

при	$n_2 = 7$	будет	$n_3 = 42$
»	$n_2 = 8$	»	$n_3 = 24$
»	$n_2 = 9$	»	$n_3 = 18$
»	$n_2 = 10$	»	n_3 не будет целым числом,
»	$n_2 = 12$	»	$n_3 = 12$

При первой комбинации: $n_1 = 3$, $n_2 = 7$, $n_3 = 42$, уложить паркет не удается. Правда, у одной стороны или у двух углов треугольника плоскость будет полностью и без пропусков заполнена этими тремя многоугольниками, однако данную комбинацию не удастся повторить у третьего угла треугольника.

Вторая и третья комбинации также не дают лучших результатов. Единственной комбинацией, которая позволяет заполнить плотно, без пустот и пропусков, плоскость не только вокруг одной точки, но и вокруг всего треугольника как целого, является комбинация $n_1 = 3$, $n_2 = 12$, $n_3 = 12$ (рис. 336).

Исследуем, какие результаты дает уравнение (1) при допущении, что $n_1 = 4$. Тогда

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}.$$

Уравнение это, составленное при $n_2 \leqslant n_3$, составит условие: $4 \leqslant n_2 \leqslant 8$.

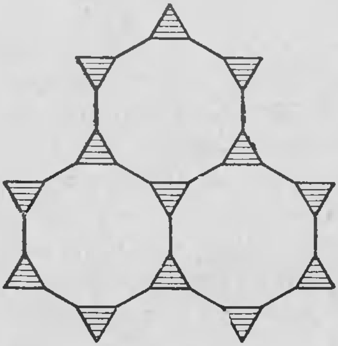


Рис. 336

Получаем снова ряд комбинаций:

При $n_2 = 5$ будет $n_3 = 20$
» $n_2 = 6$ » $n_3 = 12$
» $n_2 = 7$ » n_3 не будет целым числом,
» $n_2 = 8$ » $n_3 = 8$

Из всех этих комбинаций осуществимы только следующие: $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 12$, а также $n_1 = 4$, $n_2 = 8$, $n_3 = 8$. Они осуществимы в том смысле, что дадут полное заполнение плоскости при всех вершинах квадрата (рис. 337).

При $n_1 = 5$ ни одна комбинация невозможна. Это значит, что укладывание паркета правильными пятиугольниками требует в качестве дополнений неправильных многоугольников.

Следовательно, окончательно, при соблюдении условия, чтобы в каждой вершине сходились только три правильных многоугольника, получим четыре возможные комбинации, а именно: треугольники, двенадцатиугольники и двенадцатиугольники; квадраты, шестиугольники и двенадцатиугольники; квадраты, восьмиугольники и восьмиугольники; шестиугольники, шестиугольники и шестиугольники.

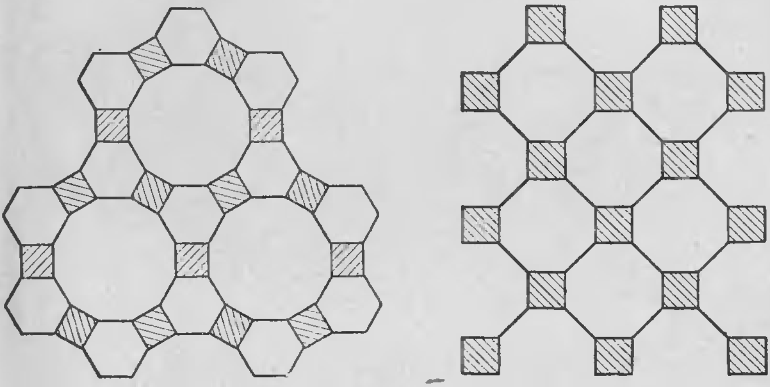


Рис. 337

Перейдем теперь к комбинациям по четыре, то есть когда в точке соединения плиток должны сойтись четыре правильных многоугольника. Ранее приведенное уравнение принимает такой вид:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1,$$

при этом $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$.

После серии рассуждений, аналогичных приведенным, получим следующие комбинации:

$$n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ n_4 = 12$$
$$n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 6,\ n_4 = 6$$
$$n_1 = 3,\ n_2 = 4,\ n_3 = 4,\ n_4 = 6$$
$$n_1 = 4,\ n_2 = 4,\ n_3 = 4,\ n_4 = 4.$$

Первая комбинация невыполнима. Однако, если бы допустили другие сочетания при третьих вершинах треугольников, получили бы узор, изображенный на рисунке 338.

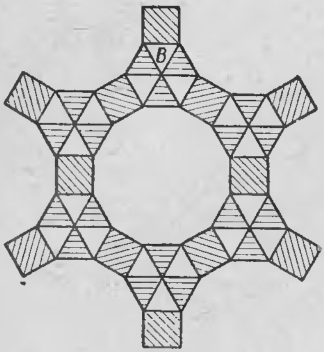


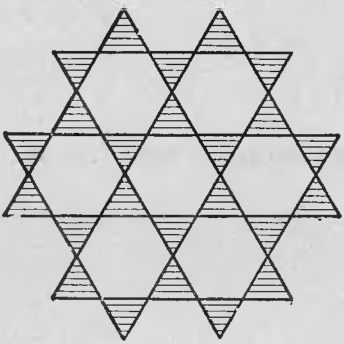
Рис. 338

Но в этом узоре треугольники, собранные в точке B, образуют, собственно говоря, шестиугольник, что привело бы эту комбинацию к уже рассмотренной комбинации по три (4, 6, 12).

Вторая комбинация дает такое расположение плиток (рис. 339).

Третья комбинация дает три очень интересных узора (рис. 340).

Заметим, что все три узора, несмотря на различие в расположении плиток, отвечают принятому условию,



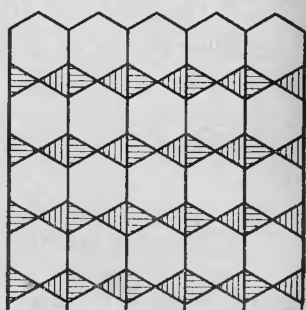


Рис. 339

чтобы в каждой узловой точке повторялось одно и то же сочетание.

Рассмотрим еще комбинацию по пять, то есть когда в одной точке сходятся пять правильных многоугольников.

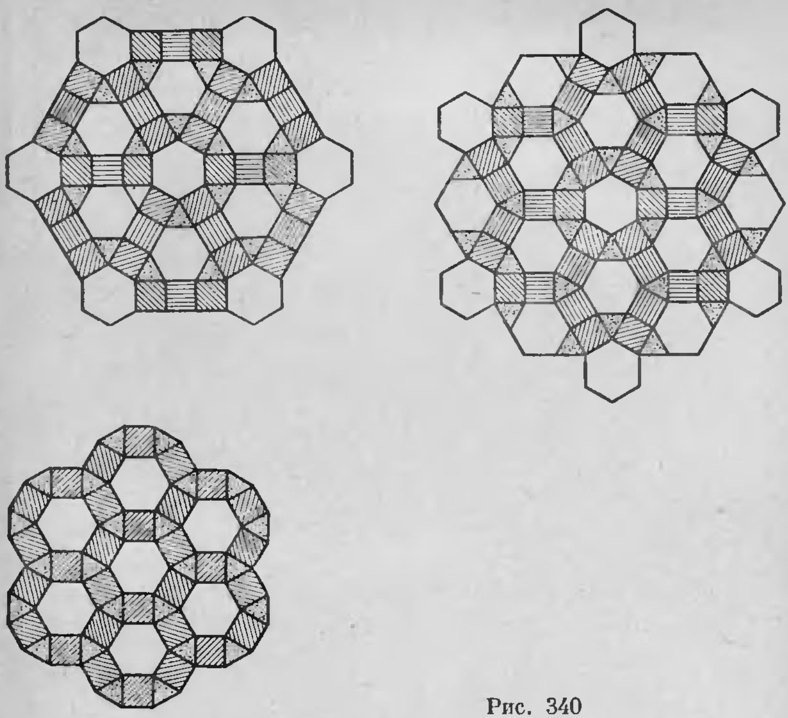


Рис. 340

Аналогично предыдущим, уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2},$$

при этом

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5.$$

Получим только две комбинации:

I. $n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3,\ n_4 = 4,\ n_5 = 4$

II. $n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3,\ n_4 = 3,\ n_5 = 6.$

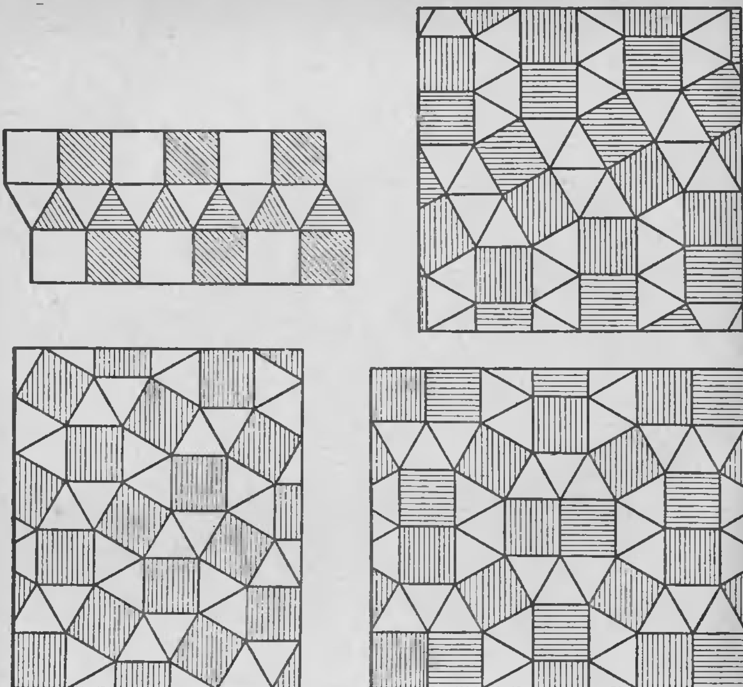


Рис. 341

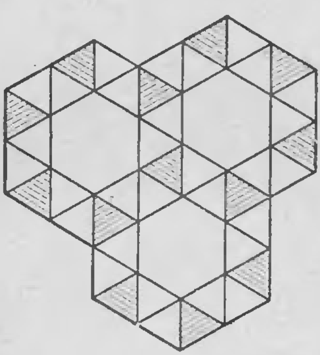


Рис. 342

Первая комбинация дает четыре очень интересных узора (рис. 341).

Зато вторая комбинация сочетаний по пять даст только один узор (рис. 342).

Сочетания по шесть, то есть сочетание шести многоугольников в одной точке, дадут только один ответ, а именно:

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3.$$

Само собой разумеется, что число менее правильных комбинаций из нескольких таких же самых правильных простых фигур... бесконечно.

В заключение приведем такую историю.

На одном деревообрабатывающем предприятии скопилось много отходов досок в виде неправильных выпуклых четырехугольников (рис. 343).

Долгое время эти отходы не использовались. Но однажды один из работников обратил внимание, что сумма

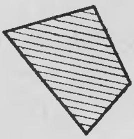


Рис. 343

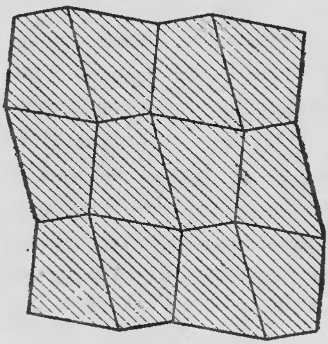


Рис. 344

углов каждого выпуклого четырехугольника составляет 360°, то есть именно столько, сколько требуется для заполнения плоскости вокруг данной точки. Из этого наблюдения родилась мысль использовать дощечки для производства паркета. Узор паркета был неправильным, но зато материал был дешевый и использовался по назначению (рис. 344).

VIII. СЧЕТЫ

1. Первобытные счеты

Открытие первобытными людьми чисел — это предмет чрезвычайно интересных исторических исследований, в специальных трудах уже далеко продвинувшихся вперед. Изучение, откуда ведут свое происхождение названия чисел, их видоизменения в различных языках, все это ведет к почти несомненному выводу, что счет, число, системы счисления и так далее тесно связаны с естественными счетами, которые и по настоящий день каждый из нас носит с собой и тысячи раз употребляет, то есть с пальцами.

О том совершенстве, до которого счет на пальцах довели китайцы, мы уже упоминали раньше, поэтому не будем останавливаться на этих природных счетах. Еще недавно в разных закоулках в Польше употреблялись счеты в виде зарубок на палках — *карбов* (отсюда карбованец — рубль). Такие, сделанные перочинным ножом для облегчения счета засечки на палках или прутьях употреблялись в Англии даже в торговых сделках, вероятно, до конца XVII века. Эти палочки после окончания расчетов раскалывались вдоль на две половины: одну брал плательщик или кредитор, другую — учреждение или должник. Они были, таким образом, как бы квитанциями, векселями или чеками.

Другим видом очень старинных счетов являются *веревочные счеты*, на которых числа отмечались при помощи завязывания узелков.

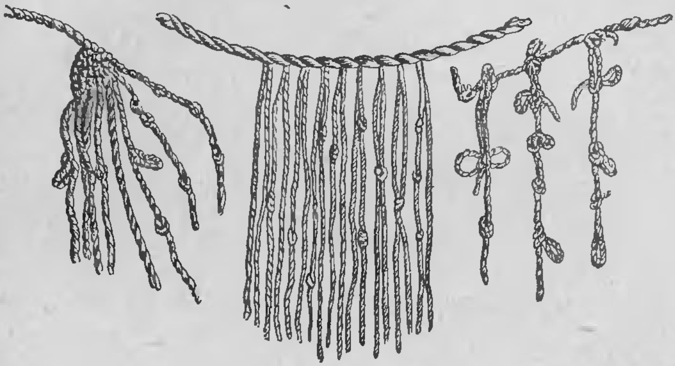


Рис. 345

На рисунке 345 изображено несколько типов перуанских веревочных счетов, так называемых *квипо*. Фиксирование чисел при помощи узелков было известно в Европе, а также в России, где они употреблялись раньше довольно часто.

Остатком этого обычая является практикуемое еще и доныне рассеянными людьми завязывание узелков... на носовых платках.

2. Абак

С самых давних времен, кроме пальцев, палочек с насечками и веревочек с узлами, для счета употреблялись камешки, бусы, ракушки и т. п. Однако это не представляло большого удобства до тех пор, пока какой-то неизвестный изобретатель не пришел к мысли, что одинаковым камешкам или *жетонам* можно придать различное значение, в зависимости от того, в каком месте поделенной на рубрики доски они окажутся.

Тогда и родился *абак*[1] — первые на свете счеты в точном значении этого слова.

Рис. 346

Какому из народов древности должны быть благодарны за это изобретение последующие века, осталось неизвестным. О таком способе счета впервые упоминает Геродот, который писал: «Египтяне считают на камешках, ведя руку справа налево, тогда как эллины ведут руку слева направо» (рис. 346).

Из этого можно сделать вывод, что первоначальный абак был поделен вертикальными линиями. Предполагаемый его вид дает рисунок 347, на котором размещенные в нескольких рубриках камешки складываются по-египетски в число 7 025 301 или по-гречески в число 1 035 207.

---

[1] Слово греческого происхождения, обозначающее «стол».

Такие счетные таблицы сравнительно быстро переделывались и усовершенствовались. Вместо укладывания камешков начали на этих таблицах писать, однако способом, прямо противоположным применяемому ныне.

В наше время школьник пишет и чертит на доске мелом; в те же далекие столетия школьник всю доску покрывал тонким слоем голубой или желтой измельченной глины, а на ней пальцами чертил буквы или цифры. Вместо

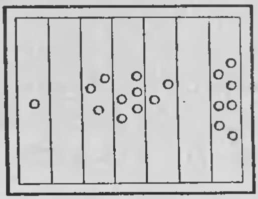


Рис. 347

Рис. 348

тряпки, которой в наше время стирают мел с доски, тогда просто сильно встряхивали доску, вследствие чего порошок снова равномерно распределялся по доске, и написанное исчезало. Линии рубрик были тонкие, но глубокие и поэтому всегда были видны. На приведенной выше таблице написано греческим письмом число: 2 014 903, римскими знаками написано: 50 817, арабскими же цифрами: 100 622 (рис. 348).

3. Mensa pyphagoreana

Так была названа одна из разновидностей абака, представляющая серьезное усовершенствование старого и приписываемая римлянами пифагорейцам.

Усовершенствование состояло в замене камешков, раскладываемых по соответствующим делениям абака, табличками или жетонами с написанными на них цифрами.

Перенесение чисел, написанных римскими цифрами, на этот «пифагорейский стол» не было таким уж простым делом. Попробуем это сделать не для очень большого числа 2973, которое в римских цифрах будет иметь такой вид: MMCMLXXIII или MMDCCCCLXXIII.

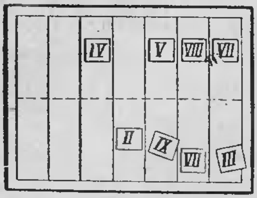


Рис. 349

Прежде всего это число следует разбить на разряды десятков: MM + DCCCC + LXX + III; затем, уяснив точно число единиц, десятков, сотен и тысяч, нужно отметить их соответствующими жетонами в первой, второй, третьей и четвертой рубриках, начиная с правой стороны. Мы видим это число

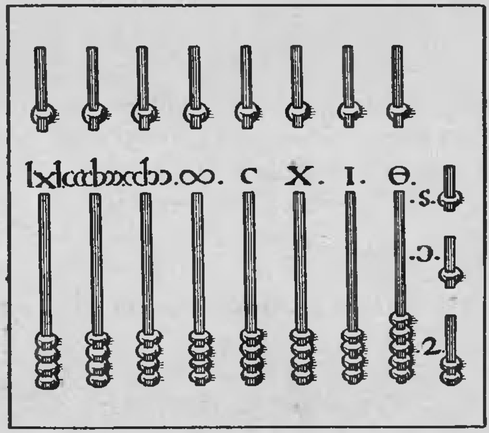


Рис. 350

записанным внизу таблицы. Вверху таблицы записано число XLDLXXXVII, то есть 40 587 (рис. 349).

Если сопоставить числа, написанные по-римски, с их видом па таблице, то мы поймем, какое колоссальное упрощение подсчетов давал абак.

Наиболее совершенным был римский абак того типа, который можно увидеть в неаполитанском музее древностей (см. рис. 350). Это доска с прорезанными в ней щелями, вдоль которых передвигаются костяшки. Имеется 7 длинных щелей с 4 костяшками и 1 длинная щель с 5 костяшками, а также 11 коротких с 1 или 2 костяшками.

Над длинными щелями находятся обозначения:

символ	1 × 1	обозначает	*тысячи тысяч*
»	(((1)))	»	*сотни тысяч*
»	((1))	»	*десятки тысяч*
»	ᔓ	»	*тысячи*
»	C	»	*сотни*
»	X	»	*десятки*
»	I	»	*единицы*
»	Θ	»	*унции*, то есть двенадцатые части.

Каждая костяшка в верхней щели имеет в 5 раз большее значение, чем соответствующая костяшка в нижней щели; следовательно, костяшка в верхней щели означает 5 единиц соответствующего ряда. Исключение составляет щель, обозначенная символом θ: в нижней длинной щели находятся 5 костяшек, которые значат 5 унций или $\frac{5}{12}$, в то же время костяшка в верхней щели означает 6 унций, то есть половину.

Костяшки в трех коротких щелях правой стороны абака означают:

.S. — пол-унции
.Ͻ. — четверть унции
.2. — шестая часть унции.

В одном из музеев сохранился абак с колышками, вставляемыми в соответствующие гнезда. Приводим рисунок этого абака почти в натуральную величину (рис. 351).

На этом абаке можно прочесть число:

$$2\,390\,298+\frac{10}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}.$$

Дальнейшим большим прогрессом в истории этих первых счетов было прикрепление знаков, так что таблицу

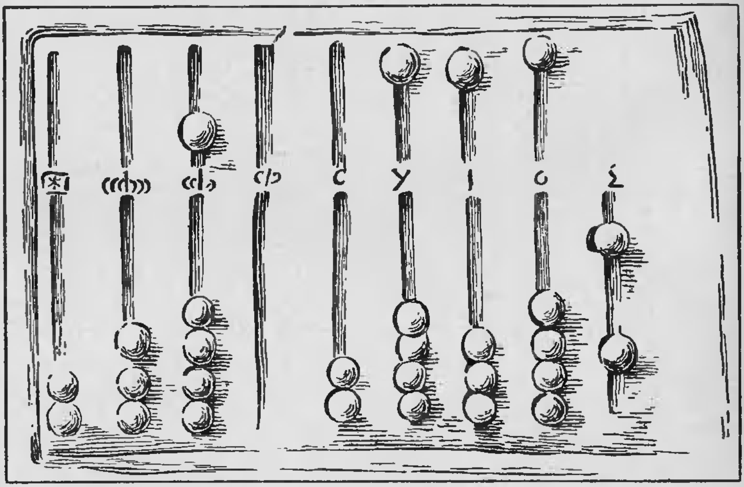


Рис. 351

стало возможно переносить, не опасаясь, что жетоны перемешаются. Для этого был высверлен ряд отверстий, в которые входили колышки с прикрепленными к ним жетонами (рис. 352).

Не только в техническом, но и в математическом отношении эти таблицы благодаря двойному расположению цифр (в горизонтальном и вертикальном рядах) были значительным шагом вперед. Древние на абаке производили не только подсчет, сложение и вычитание, но и каким-то неизвестным нам способом также умножение, деление и даже извлечение корней.

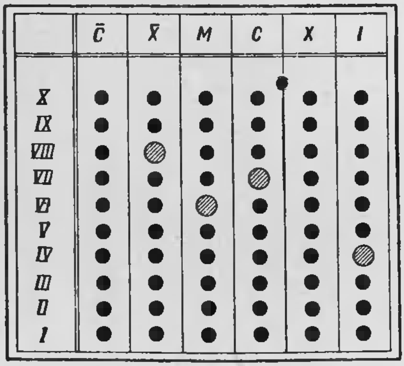


Рис. 352

4. Китайский суань-пань и русские счеты

В образе китайских счетов, называемых *суань-пань*, как бы живет воспоминание о лучших временах абака.

Этот инструмент, так сильно напоминающий усовершенствованный абак, употребляется в Китае, кажется, 3000—4000 лет. Поэтому, несомненно, это изобретение самих китайцев.

Суань-пань — продолговатая деревянная рамка, разделенная линейкой на две неравные части. Поперек ее прочно укреплены 9—15 прутьев (рис. 353, 354).

На прутьях нанизаны костяные или деревянные кружочки, по пяти на прутьях под планкой, по два — над ней. Кружочки над планкой означают 5, 50, 500 и так далее — в зависимости от того, на каком пруте они находятся.

Рис. 353

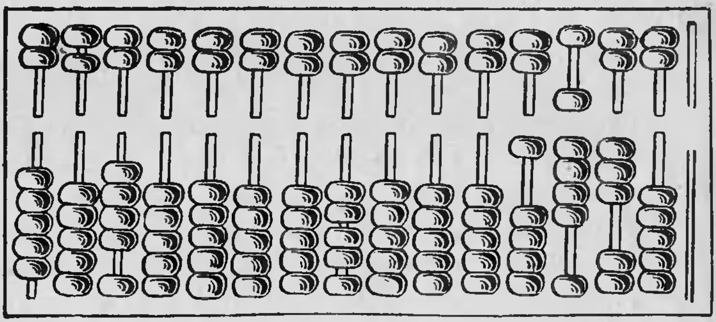


Рис. 354

Японский *соробан* более прост (рис. 355).

Русские счеты напоминают абак того времени, когда в безыменных рубриках раскладывались безыменные камешки.

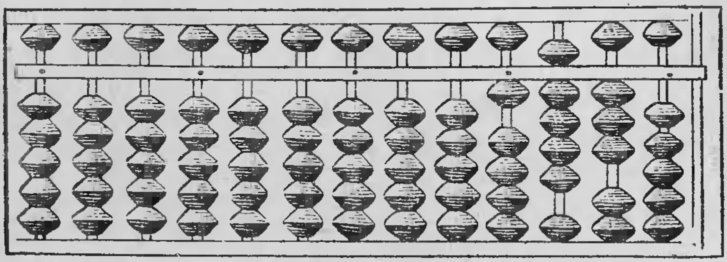


Рис. 355

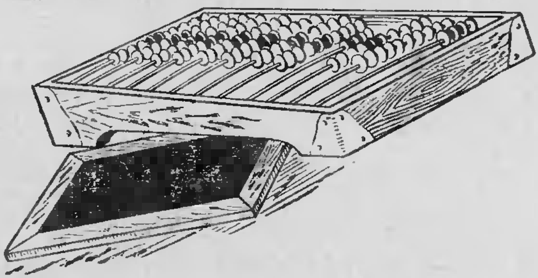


Рис. 356

Эти счеты (рис. 356) в руках умелого счетовода были и остаются еще доныне приспособлением, прекрасно помогающим при подсчете больших колонн чисел. Квалифицированные счетоводы способны производить на счетах также умножение и деление.

5. Счетные столбики Не́пера

Прежде чем мы перейдем к краткому объяснению устройства счетных машин, скажем несколько слов о двух других идеях в области облегчения монотонных арифметических действий. Приведенная здесь табличка (рис. 357) представляет собой индийский способ умножения, распространенный в Европе в позднее средневековье и во времена Возрождения.

Множимое 934 записывается вверху, множитель 314 — с правой стороны. Прежде всего умножается 934 на 3, и произведение от умножения каждой в отдельности цифры ($3 \cdot 9 = 27$, $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$) вписывается в клетки по очереди так, чтобы число десятков помещалось над диагональной линией, а число единиц — под ней. То же самое делается при умножении числа 934 на 1 и 4. Если десятков нет, то пишется нуль; например, частичное произведение 9 пишется как 09.

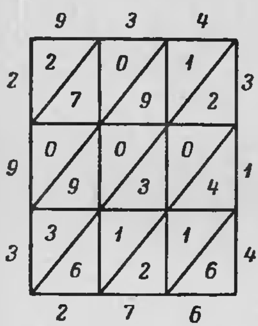


Рис. 357

Когда треугольнички окажутся заполненными цифрами, суммируются цифры вдоль диагоналей, и результат записывается под квадратом с левой его стороны; причем суммирование начинается от крайнего правого треугольника самого нижнего ряда (6). Полученное число 293 276 будет полным произведением $314 \cdot 934$.

Как выглядел этот способ в применении для умножения многозначных чисел, видно на примере, заимствованном из книги польского математика Яна Брожека «Арифметика целых чисел». Книга эта была издана в 1620 году и многие годы служила учебником для учащейся молодежи.

Вверху, на линии AB (рис. 358), написано множимое: 356 784; с правой стороны, у вертикальной линии BD, фигурирует множитель: 470 196. Отдельные произведения однозначных чисел записываются в клеточках решетки; например, произведение $9 \cdot 8 = 72$ находится на пересечении строки, обозначенной цифрой 9, и колонки с цифрой 8.

При выполнении сложения наискось очередные цифры произведения записывались сначала по линии DC (справа налево), потом по линии CA (снизу вверх); если при этом

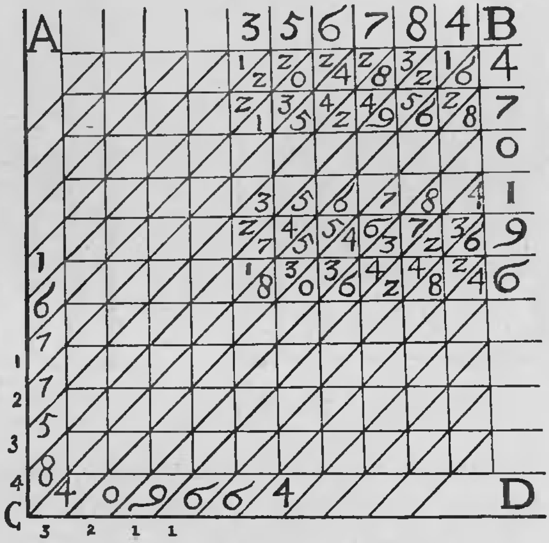


Рис. 358

получалась двузначная сумма, то цифра десятков записывалась за рамкой, под следующим числом.

В произведении получилось 167 758 409 664.

На этом способе знаменитый английский математик, творец логарифмов Джон Не́пер (1550—1617 гг.) обосновал идею своих счетов, известных под названием счетных столбиков Непера (рис. 359).

Средние столбики с ручками можно передвигать; два крайних столбика неподвижны.

Допустим, нужно умножить 4681 на 7. Быстро укладываем движущиеся столбики непосредственно возле

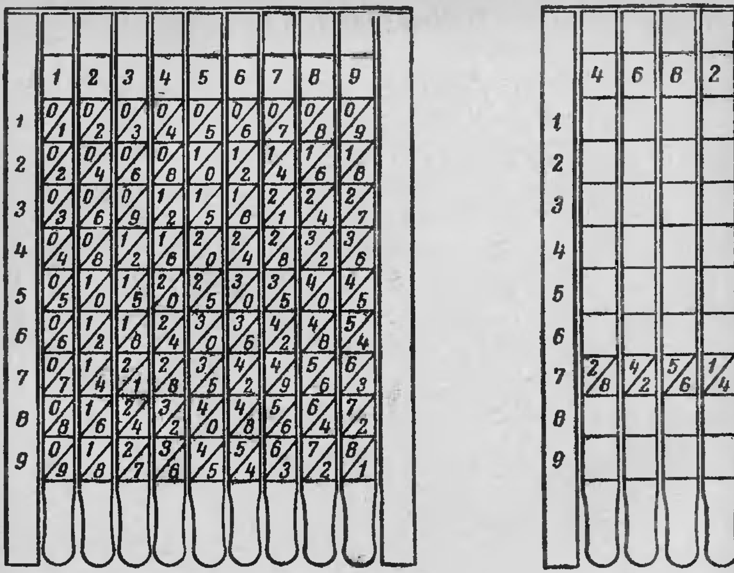


Рис. 359

левой неподвижной линейки таким образом, что верхние цифры образуют число 4681. Тогда против цифры 7, написанной на левой неподвижной линейке, найдем следующую цифровую комбинацию:

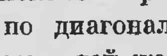


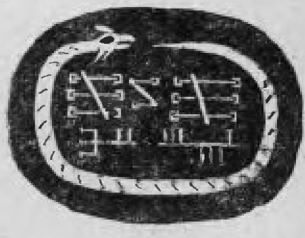
Рис. 360

Чтобы получить искомое произведение, достаточно суммировать цифры по диагонали, начиная с правой стороны, и выписать их в той же очередности; получим тогда число 32 774, которое в самом деле равняется произведению $7 \cdot 4681$.

Несмотря на большую простоту и дешевизну, это приспособление не нашло, однако, широкого применения.

6. Номография

О графических методах, применяемых к арифметическим действиям, говорилось уже несколько подробнее в главе «Геометрическая арифметика». Однако все приведенные там способы, несмотря на свою простоту, требуют каждый раз довольно канительной работы по откладыванию в соответствующих единицах измерения отрезков, а затем измерения в тех же единицах отрезка, составляющего результат действия. Поэтому эти способы, особенно при технических вычислениях, не могли получить широкого практического применения.



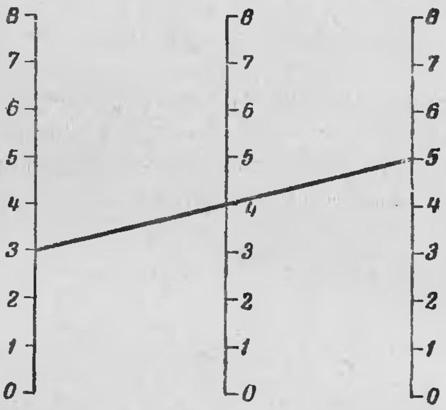


Рис. 361

В эту очень обширную область начертательной арифметики французский математик Морис Окань ввел новый метод, который нашел широкое распространение как раз в области практики. Эту систему, называемую *номогра-*

фией, все многообразие ее возможностей наиболее легко можно понять, рассмотрев хотя бы несколько самых простых задач.

Три вертикальные параллельные линии (рис. 361) поделим в одинаковом отношении на отрезки. Если через какие-либо две точки на крайних линиях провести прямую, то на средней линии она покажет нам среднюю арифметическую отрезков крайних линий; например, $4 = \frac{3+5}{2}$.

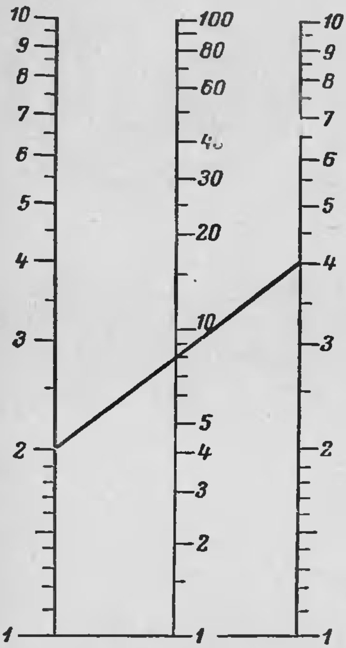


Рис. 362

Если на средней линии начертить шкалу с делениями в два раза меньшими, чем на боковых линиях, то, соединяя две точки шкал боковых линий прямой, получим на ее пересечении со средней линией, разумеется, уже не среднеарифметическую, а сумму показателей шкал крайних линий, то есть $8 = 3+5$.

Пойдем дальше. Вместо деления на равные отрезки, употребляемого до сих пор, применим логарифмическое деление линий (рис. 362). Тогда вместо суммы $Z = x + y$, которую мы получили в первой номограмме, получим сумму логарифмов:

$$\log z = \log x + \log y,$$

откуда

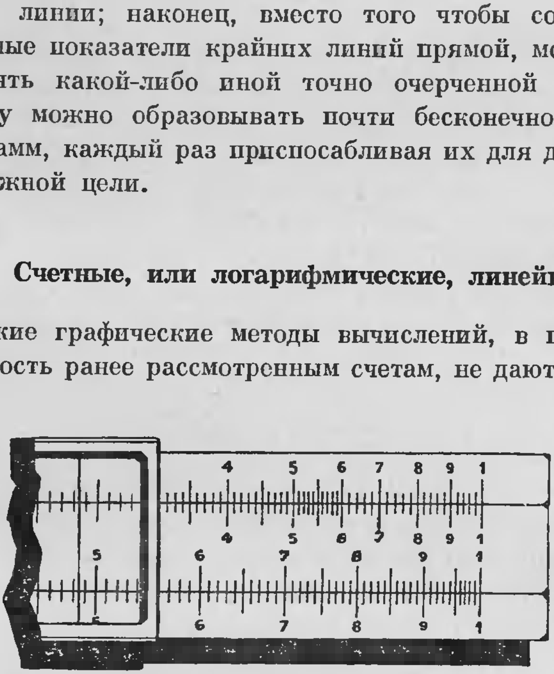
$$z = xy.$$

Такая номограмма дает нам, следовательно, произведение показателей шкал крайних линий, соединенных прямой: $8 = 2 \cdot 4$.

Из этих трех самых простых графиков нетрудно понять, какие большие возможности кроются в методе номографии. Можно ведь применять различные шкалы деления линий, раздвигать крайние линии на равные расстояния от средней, вместо прямых линий брать одну, две или все три кривые линии; наконец, вместо того чтобы соединять отдельные показатели крайних линий прямой, можно их соединять какой-либо иной точно очерченной кривой. Поэтому можно образовывать почти бесконечное число номограмм, каждый раз приспосабливая их для достижения нужной цели.

7. Счетные, или логарифмические, линейки

Всякие графические методы вычислений, в противоположность ранее рассмотренным счетам, не дают точных



результатов вычислений, а только более или менее приблизительные результаты.

Наиболее распространенными этого рода инструментами для приближенных подсчетов являются так называемые счетные, или логарифмические, линейки, то есть линейки с нанесенной на них шкалой. Состоят они из двух подвижных частей и передвигающегося поверху стеклянного окошечка. Шкалы подвижных линеек построены на том же самом принципе логарифмов, о котором мы говорили при рассмотрении последней номограммы, то есть

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b;$$
$$\log(a : b) = \log a - \log b.$$

Благодаря своей дешевизне счетные линейки так широко распространены, что более детальное изложение их устройства можно опустить, упомянув только, что даже самые совершенные из них, то есть самые точные и подробные в отношении вычислений, действуют, однако, всегда очень медленно, и многолетнее упражнение немного ускоряет темп вычислений на них.

На этих же самых принципах различных масштабов подвижных шкал конструируются также счетные круги.

8. Счетные машины

Всякого рода счеты вытесняются счетными машинами, над усовершенствованием которых три века работали и все еще работают крупнейшие математические умы.

Автором первой идеи машины, которая через соответствующее число оборотов рукоятки сама фиксирует числа, складывает, отнимает, множит, делит, был великий мыслитель и математик Блез Паскаль. Мысль сконструировать такую машину пришла ему в 15-летнем возрасте. И над осуществлением этого замысла Паскаль упорно работал в течение целых 10 лет.

Поочередно построил он более чем 50 различных моделей, в которых воплотил столько идей механики, что его преемники черпали из этого богатства не осуществленных им идей как из сокровищницы. Все построенные модели не удовлетворяли гениального юношу. Наконец в 1646 году он построил такую машину, которую признал достойной публичного показа и производства. Четыре экземпляра ее дошли до наших времен. Это была машина, специально приспособленная для подсчета налогов, сборщиком которых в городе Руане был отец Блева. Формой своей машина напоминала длинный сундучок. На его крышке помещалось восемь кружков со шкалами, отвечающими соотношению тогдашних французских монет (1 ливр = 20 соль = 240 дэнье). Каждый кружок снабжен был рукояткой, над кружками виднелись отверстия, в которых показывались числа.

Большим недостатком машины было то, что каждую цифру нужно было фиксировать отдельно посредством передвижения специальной ручки через соответствующее число делений. Так, например, чтобы зафиксировать налог в 2 ливра 15 соль 19 дэнье, нужно было оперировать тремя рукоятками. Если же пришлось бы прибавить к этой сумме еще, допустим, 98 ливров 6 соль 4 дэнье, тогда уже работали бы пять рукояток.

Первые усилия позднейших изобретателей были направлены на то, чтобы получить возможность приводить в движение все кружки одним оборотом общей рукоятки, а также на то, чтобы из этого движения были выключены те кружки, на которых числа не нужно было изменять.

Эту проблему решил Лейбниц.

Из рисунка 363, представляющего собой разрез такого еще очень примитивного инструмента, легко можно понять, каким именно способом эта проблема была разрешена.

Знаменитый Гаусс нашел несколько отличный выход из этого затруднения, построив в форме округлой шкатулки маленькую удобную машинку, популярную в свое время, особенно в Германии.

Распространенпые всюду в наше время машины — это главным образом новые усовершенствования, основанные на общих идеях счетных машин (рис. 364).

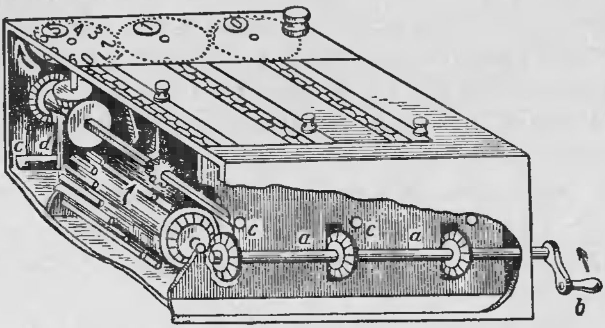


Рис. 363

Допустим, что хотим суммировать на счетной машине два больших числа, например 1 707 756 701 и 243 965 243.

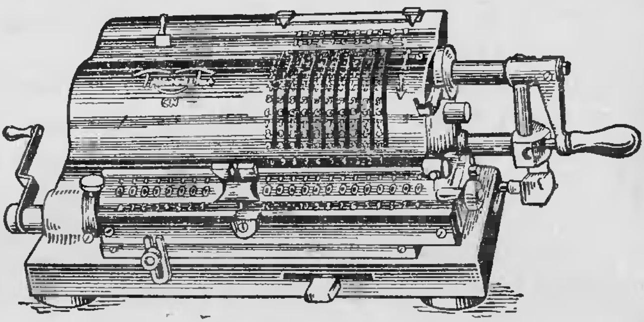


Рис. 364

Устанавливаем по очереди малую передачу на ряды с цифрами 1, 0, 7, 6, 5, 7, 7, 0, 7, 1, делаем один полный оборот рукояткой, и сразу же первое число покажется в нижних окошках. Затем ставим нередачу на цифры

3, 4, 2, 5 и т. д. После второго полного оборота рукоятки появится в окошках внизу готовая сумма двух данных чисел, а именно 1 951 721 944.

Если захотим произвести умножение, например, 8 · 243 965 243, то устанавливаем передачу у соответствующих цифр и делаем восемь оборотов рукояткой. Произведение 1 951 721 944 появится в нижних окошках.

При умножении на многозначное число нужно каждому обороту рукоятки придать значение в 10, 100 и так далее раз большее, чем значение обычного оборота. Делается это с помощью специального рычажка, расположенного в нижней части машины. При вычитании вращаем рукоятку в обратном направлении. Деление принципиально сводится к вычитанию. Однако деление требует от работающего на машине исключительно быстрой ориентировки и на всех машинах представляет всегда самую трудную операцию.

Более современные машины не только выполняют все указанные выше действия, но одновременно подробно записывают их ход четкими цифрами на бумажных лентах или даже вписывают его на листе бумаги в соответствующие рубрики. Многие счетные машины последних выпусков имеют вместо передачи клавиши с цифрами, что значительно ускоряет вычисления. Нет нужды говорить, что счетные машины решают задачи совершенно точно и, следовательно, машины годятся для всевозможных вычислений.

В последнее время созданы великолепные, но в то же время и необычайно сложные электронные математические машины.

IX. БОЛЬШИЕ И МАЛЫЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

1. Три классические задачи древности

Между многими проблемами геометрии три возбуждали особый интерес у первых греческих математиков.

Вопросы эти, унаследованные позднейшими веками, стали чем-то вроде классических задач. Вот они.

1. **Удвоение куба,** то есть построение ребра такого куба, объем которого был бы вдвое больше объема данного куба.

2. **Трисекция угла,** то есть деление плоского угла на три равные части.

3. **Квадратура круга,** то есть построение квадрата, площадь которого равнялась бы площади данного круга.

Все эти три проблемы должны были быть разрешены исключительно геометрическим способом, при помощи одного только циркуля и линейки, на которой не нанесено никаких делений. В течение многих десятков столетий ученые занимались этими вопросами, не будучи в состоянии ни решить их, ни доказать их неразрешимость. И только математики XIX века, вооруженные новыми, совершенными математическими методами, сумели доказать, что все эти задачи при заданных условиях невозможно решить.

Доказательство неразрешимости двух первых проблем сводится приблизительно к такому математическому рассуждению: чтобы удвоить куб с ребром a, нужно найти отрезок длиной x, который отвечал бы уравнению $x^3 = 2a^3$.

При делении угла на три равные части, если синус этого угла обозначим через a, а синус третьей его части — через x, получится уравнение $4x^3 = 3x - a$.

Этим способом обе проблемы, рассматриваемые аналитически, приводятся к уравнениям третьей степени. Но геометрия круга (уравнение которого имеет вид $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$) и прямой линии (с уравнением типа $ax + bx + c = 0$) не ведут к решению уравнений третьей степени, поэтому эти задачи с таким ограничением неразрешимы. Однако обе проблемы могут быть решены разными способами при помощи кривых, образующихся из конического сечения.

Третье задание, квадратура круга, имеет несколько иную природу, но также неразрешимо, и это не только при условии ограничения средств выполнения задания только линейкой и циркулем, но и при условии употребления кривых, которых достаточно для разрешения двух первых проблем.

Неужели же огромные усилия часто гениальных умов, работающих в течение многих столетий над разрешением этих задач, пропали даром? Нет, потому что в процессе этой, на первый взгляд, бесплодной работы добыто огромное количество важных результатов, сделаны открытия, которые имели и имеют первостепенное значение.

2. Замечательная идея польского ученого в области квадратуры круга

Среди этих косвенных достижений, пожалуй, самым важным является уточнение отношения длины окружности к ее диаметру — отношения, обозначаемого буквой π.

Этот числовой знак имеет необыкновенно важное значение для всей современной математики. Прежде чем перейти к очень беглому изложению истории этого знаменитого знака, приведем одно из известных приближенных решений проблемы квадратуры круга. Нас это особенно интересует потому, что автором его был поляк, известный придворный математик короля Яна III, библиотекарь в Виланове, Адам Адаманди Коханский. Наряду со многими другими произведениями он издал в 1685 году книжку,

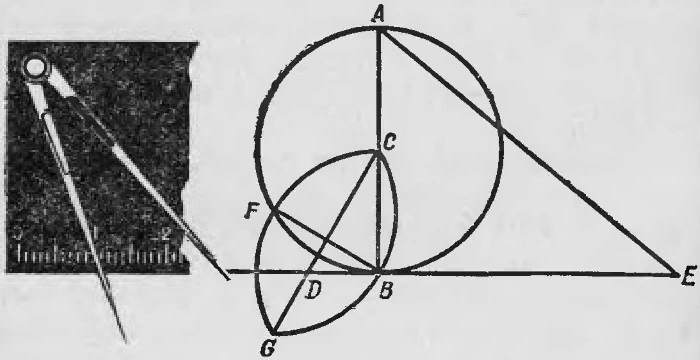


Рис. 365

в которой и приводит интересный способ приближенного выпрямления окружности, и при этом все вычерчивается одним-единственным раствором циркуля (рис. 365).

Радиус круга $AC = 1$. В точке B проводим касательную к кругу. Откладываем $BF = BC$. Принимая точки B и F за центры окружностей, проводим две дуги одним и тем же радиусом $AC = 1$. Получим точку их пересечения G. Хорда GC этих дуг пересечет касательную в точке D. Откладываем $DE = 3BC$; тогда AE будет приближенно равняться половине длины окружности. Известно, что

$AC = CB = BF = 1$, отсюда $BD = \mathrm{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Дальше,

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} =$$

$$= 13{,}333333\ldots - 3{,}4641016\ldots = 9{,}8692317\ldots$$

Откуда

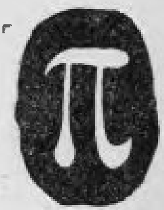
$$AE = \sqrt{9{,}8692317\ldots} = 3{,}14153334\ldots$$

Следовательно, значение π определено, и при этом точно, до пятого десятичного знака.

Ошибка составляет $0{,}00005931 \cdot 2$, то есть около $\frac{1}{10\,000}$ радиуса круга.

3. Великий геометрический символ

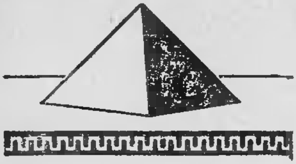
Обозначение отношения длины окружности к ее радиусу буквой π насчитывает всего только два века. Этот символ выводится от греческих слов «периферия» или «периметр».



В первый раз употребил его в 1706 году английский математик Вильямс Джонс. Во всеобщее употребление этот символ вошел лишь в середине XVI века, после издания «Анализа» Леонарда Эйлера, члена Петербургской Академии наук.

Однако сама проблема, хотя и без символического обозначения, существует уже 4000 лет с лишним. Исследователи известной пирамиды Хеопса усмотрели в отношениях ее размеров заметные следы этого великого символического отношения длины окружности к ее диаметру. А именно: частное, полученное от деления суммы двух сторон основания на высоту пирамиды, выражается числом 3,1416 — это значит числом π с точностью до трех знаков после запятой.

Знаменитый папирус Амеса (древнейший «учебник» математики, написанный за 2000 лет до н. э.) приводит следующий способ построения квадрата, равного по площади кругу: «Отбрось от диаметра его девятую часть и построй квадрат со стороной, равной остальной части, будет он эквивалентен кругу». Из этого указания следует, что π Амеса равнялось 3,1605. Строители пирамиды, по-видимому, лучше проникли в тайну числа.



На протяжении последующих 4000 лет π претерпело много изменений. Его длина возросла от установленного Архимедом значения $\frac{22}{7}$, которое давало десятичную дробь с двумя цифрами после запятой, до десятичной дроби с 707 знаками после запятой в XIX веке.

В настоящее время при помощи электронных счетных машин найдено уже свыше 2000 знаков после запятой.

Самой важной, прямо-таки переломной, датой в истории числа π был 1882 год, когда немецкий математик Линдеманн окончательно установил таинственный характер этого знака: число π не может быть корнем алгебраического уравнения, где коэффициенты выражаются целыми числами.

4. Знаменитая задача Фалеса

Здесь же, вслед за большими проблемами, разрешение которых длится целые века, отметим еще несколько небольших, но очень увлекательных по своей простоте вопросов, бывших когда-то достойными действительно великих математиков, но теперь низведенных до уровня почти детских задач.

Одной из таких древнейших задач было сделанное Фалесом (VII—VI века до н. э.) вычисление высоты египетской пирамиды по длине ее тени. Вероятнее всего, это было сделано в такое время дня, когда длина тени равняется высоте предмета, отбрасывающего ее. Но возможно также, что гениальный ученик египетских жрецов уже тогда умел пользоваться признаком подобия треугольников.

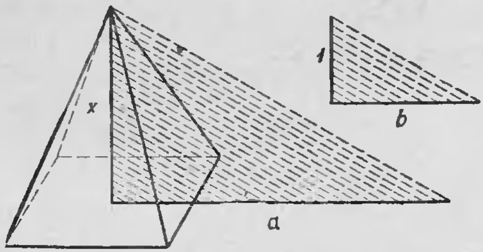


Рис. 366

Если высоту пирамиды обозначить неизбежным x (рис. 366), длину ее тени — посредством a, высоту столбика — через 1, а длину отбрасываемой им тени — через b, то, конечно,

$$x : a = 1 : b.$$

Отсюда

$$x = \frac{a}{b}.$$

Это все только теперь так удивительно просто, но каким замечательным открытием оно было для своего времени!

Тот же Фалес, уже по возвращении в Грецию, решил известную задачу об определении расстояния корабля от берега.

Пусть корабль находится в точке K (рис. 367), а в точке A — пристань. Нужно определить расстояние KA.

Построив в точке A прямой угол, Фалес отложил вдоль берега два равных отрезка: $AB = BC$. В точке C опять построил прямой угол и шел по перпендикуляру CD

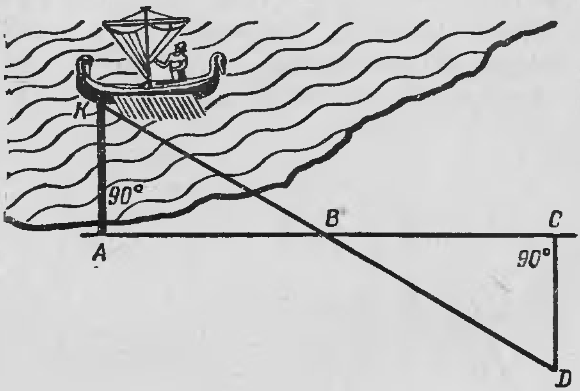


Рис. 367

до тех пор, пока не дошел до точки, из которой K (корабль) и B были видны лежащими на одной прямой линии KBD.

$\triangle BCD = \triangle AKB$, следовательно, $CD = AK$.

Отрезок CD можно было, конечно, непосредственно и точно измерить.

В памяти веков остался тот момент, когда человек овладел пространством, недоступным для его ног, для его рук и для его измерительного шнура.

5. Несколько задач Архимеда

Арабский математик Эль-Бируни (X век) передал нам как принадлежащую Архимеду следующую теорему: «Если в дугу ABC вписать ломаную линию, составленную из двух хорд: AB и BC, то перпендикуляр, опущенный на AB из точки D, лежащей на середине дуги, разделит ломаную ABC на две равные части, то есть, что $AE = EB + BC$» (рис. 368).

Имеется, пожалуй, около десяти разных способов доказательства этой теоремы. Остановимся на одном, который как будто принадлежит самому автору теоремы, то есть Архимеду.

Возьмем отрезки $DH = DZ = DB$. Поскольку $DH = DB$, то $\angle HAD = \angle ZAD$, следовательно, и $\triangle HAD = \triangle ZAD$, то есть $AZ = AH$.

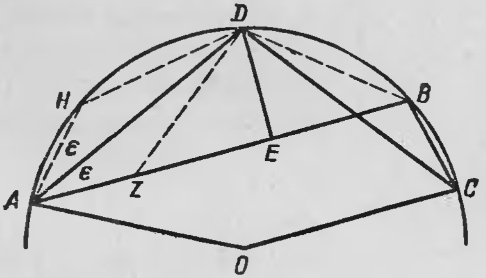


Рис. 368

Дальше: $DA - DH = DC - DB$, отсюда же $AH = BC$; значит, $AZ + ZE = BC + EB$, окончательно же $AE = EB + BC$.

Многие практические люди готовы спросить: почему Архимеду и его позднейшим комментаторам приведенная здесь теорема показалась такой важной, что все время отыскивались новые и новые ее доказательства?

Безусловно, она действительно часто применяется в геометрических задачах и заметно облегчает их решение.

Чтобы убедиться в этом, можно попробовать решить задачу, которую приводит упомянутый уже здесь Эль-Бируни: построить треугольник, все три вершины которого лежали бы на данной окружности и сумма двух сторон которого известна.

Более современным способом эту задачу можно выразить так. В некотором треугольнике ABC даны сторона $AB = c$ и сумма двух остальных сторон $BC + CA = a + b = m$. Известен также радиус описанной около треугольника окружности. Как построить данный треугольник?

Рассматривая в одном из своих произведений вопрос нахождения суммы прогрессий, к чему он часто возвращался, Архимед выдвигал такую теорему: если даны числа A, B, C, D, E, из которых каждое предыдущее число содержит учетверенное последующее, то сумма их, увеличенная на $\frac{1}{3}$ наименьшего числа (E), равняется $\frac{4}{3}$ наибольшего (A) (рис. 369).

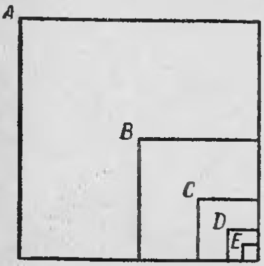


Рис. 369

Сформулированное таким образом гениальным математиком задание в современном виде представлялось бы суммой прогрессии:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Интересно, однако, доказательство Архимеда.

Пусть $UXYZ$ обозначают числа $\frac{1}{3}B$, $\frac{1}{3}C$, $\frac{1}{3}D$, $\frac{1}{3}E$. Тогда

$$B + U = \frac{1}{4}A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}A = \frac{1}{3}A,$$

и подобным образом:

$$C + X = \frac{1}{3}B, \quad D + Y = \frac{1}{3}C, \quad E + Z = \frac{1}{3}D.$$

Отсюда

$$(B + C + D + E) + (U + X + Y + Z) = \frac{1}{3}(A + B + C + D).$$

Но

$$U + X + Y = \frac{1}{3}(B + C + D).$$

Поэтому

$$B + C + D + E + Z = \frac{1}{3}A.$$

Прибавляя к этой сумме A и заменяя Z на $\frac{1}{3}E$, получим:

$$A + B + C + D + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A.$$

Заштрихованную фигуру (рис. 370) Архимед назвал *арбелоном* и доказал, что его площадь равняется площади круга с диаметром, равным отрезку BD, что значит отрезку, равному перпендикулярной линии к диаметру AC, восстановленной из точки D до пересечения с дугой полукруга ABC.

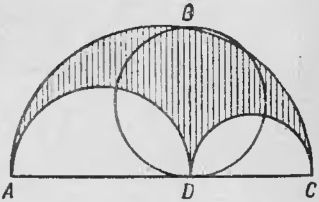


Рис. 370

Обозначим площадь арбелона через S:

$$S = \frac{\pi}{8}[AC^2 - (AD^2 + DC^2)], \quad \text{но} \quad AC^2 = (AD + DC)^2,$$

следовательно,

$$S = \frac{\pi}{8}[(AD + DC)^2 - AD^2 - DC^2] = \frac{\pi}{4} \cdot AD \cdot DC.$$

Но $AD \cdot DC = DB^2$, поэтому $S = \frac{\pi}{4}DB^2$.

Фигуру же, подобную заштрихованной на данном рисунке, Архимед назвал *салиноном* и ее меру нашел в виде круга с диаметром FG (рис. 371).

Обозначим площадь салинона через S. Равняется она:

$$S = \frac{\pi}{8}(AB^2 + CD^2 - AC^2 - DB^2).$$

Подставляя в это уравнение значения: $AB = AD + DB$, $AC = DB$ и $AD = AC + CD$, получим:

$$S = \frac{\pi}{4}(CD + DB)^2.$$

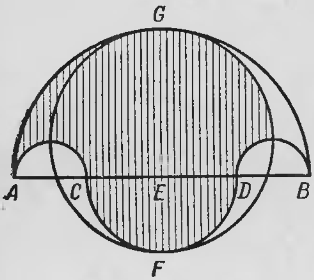


Рис. 371

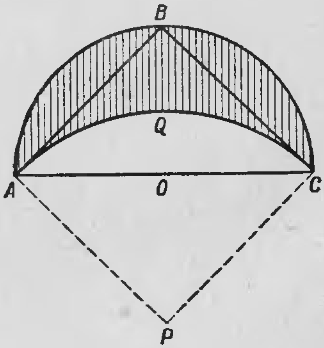


Рис. 372

Но $CD + DB = CE + ED + DB = CE + EB$, $CE = EF$ и $EB = EG$. Следовательно, окончательно

$$S = \frac{\pi}{4}(FE + EG)^2 = \frac{\pi}{4}FG^2.$$

Раз уж мы рассматриваем эти Архимедовы полукруги в полукругах, то скажем еще несколько слов о родственнице арбелонов и салинонов — *люнуле* Гиппократа (V век до н. э.).

В полукруг, очерченный из точки O, вписан равнобедренный треугольник ABC (рис. 372). Из точек A и C проведем перпендикуляры к AB и CB; пересекутся они в точке P, которую примем за центр окружности с радиусом PA, и описываем этим радиусом дугу AQC.

Площадь $ABCQA$ (заштрихованная), заключенная между двумя дугами, то есть площадь так называемой люнули, равняется площади треугольника ABC.

Площадь люнули равна площади треугольника APC плюс площадь полукруга ABC минус площадь $\frac{1}{4}$ круга $PAQC$.

Но $\frac{1}{2}$ круга ABC и $\frac{1}{4}$ круга $PAQC$ имеют равные площади, так как $AO^2 = \frac{1}{2} AP^2$; и поскольку $\triangle ABC = \triangle APC$, то, значит, площадь люнули действительно равняется площади треугольника ABC.

6. Несколько интересных геометрических задач из разных времен

Знаменитый математик Мухаммед-бен-Муса Аль-Гваризми (IX век) в своем рассуждении, касающемся вопросов применения геометрии к алгебраическим вычислениям, между другими приводит такие задачи.

I. Найди число, квадрат которого, увеличенный на то же число, взятое 10 раз, равняется 39.

Алгебраически это выразится уравнением:

$$x^2 + 10x = 39.$$

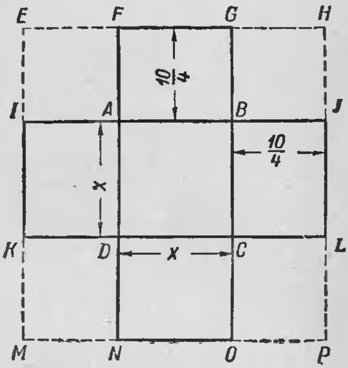


Рис. 373

Аль-Гваризми строит квадрат $ABCD = x^2$ (рис. 373), на всех четырех его сторонах строит прямоугольники с другой стороной, равной $\frac{10}{4}$. Тогда крест $AFGBILCONDKJ$ будет равен $x^2 + 10x$, то есть 39.

Дополнив этот крест до квадрата $EHPM$ четырьмя маленькими квадратами: $AFEJ$, $BGHI$, $CLPO$, $DNMK$, сумма которых составляет $4 \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 25$, получим квадрат $EHPM$, равный $39 + 25$, то есть 64.

Из этого очевидным образом следует, что сторона данного квадрата равняется 8.

Поэтому

$$AB = x = IJ - 2BJ = 8 - 2 \cdot \frac{10}{4} = 3.$$

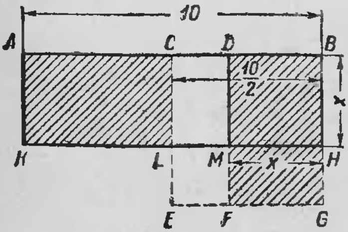


Рис. 374

Значит, искомое число будет 3.

II. Найди число, квадрат которого, увеличенный на 21, будет равняться тому же числу, взятому 10 раз.

Это значит, $x^2 + 21 = 10x$.

Пусть фигура $ABHK$ (рис. 374) будет прямоугольником со сторонами 10 и x, а $BDMH$ — квадратом x^2. Тогда прямоугольник $ADMK$ будет равен $10x - x^2 = 21$.

На половине отрезка AB построим квадрат $CBGE$. Отрезок LM будет, следовательно, равняться $\left(\frac{10}{2} - x\right)$.

Вычисляем:

$$LMFE = CBGE - CDML - DBGF =$$
$$= CBGE - CDML - ACLK.$$

Так как прямоугольники $DBGF$ и $ACLK$ равнозначны, можем написать:

$$LMFE = CEGB - ADMK,$$

или

$$LMFE = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21 = 4,$$

откуда $LM^2 = 4$, следовательно, $LM = 2$, наконец

$$x = DB = \frac{10}{2} - 2 = 3.$$

Действительно, $3^2 + 21 = 3 \cdot 10$.

Французский математик первой половины XVIII века Дюфо установил интересную зависимость между площадями правильных многоугольников, вписанных в круг и описанных около того же круга.

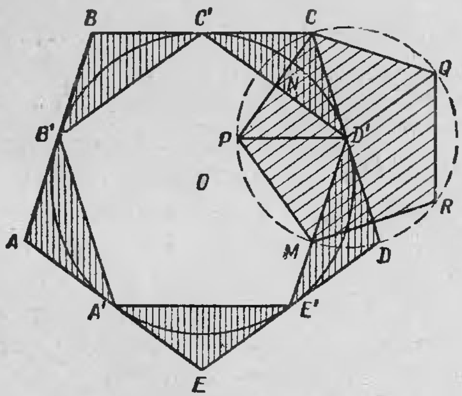


Рис. 375

В качестве тех, которые идут по следам Пифагора, рассмотрим эти свойства на примере излюбленной пифагорейской фигуры, а именно пятиугольника.

Но эти наблюдения можно легко обобщить и для других правильных многоугольников.

Итак, Дюфо обнаружил, что разность площадей пятиугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ равняется площади пятиугольника, вписанного в круг с диаметром, равным стороне пятиугольника $ABCDE$ (рис. 375).

Треугольник $C'CD'$ может быть разделен на два прямоугольных треугольника CNC' и CND'. Треугольники эти, будучи составлены другими сторонами, образуют равнобедренный треугольник $PD'C$, угол которого у вершины D' является внутренним углом правильного пятиугольника, вписанного в круг с радиусом CD' или диаметром CD.

Можно заметить, что треугольники $C'CD$, $D'DE'$, $E'EA'$, $A'AB'$, $B'BC'$ имеют в сумме площадь, равную площади правильного пятиугольника $MPCQR$.

Если в окружность вписать правильный пятиугольник $A'B'C'D'E'$ и в нем провести ко всем сторонам перпендикуляры $A'J$, $B'K$, $C'G$ и так далее, то перпендикуляры

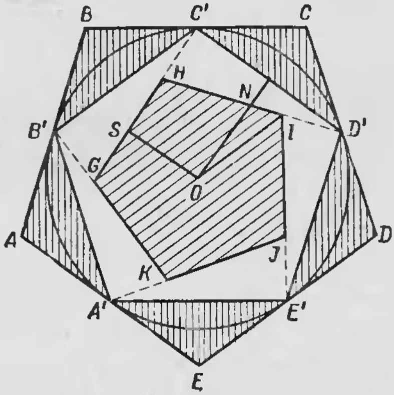


Рис. 376

образуют новый правильный пятиугольник $GHIJK$, площадь которого равняется разности площадей вписанного и описанного около той же самой окружности пятиугольников (рис. 376).

Из центра O опустим перпендикуляры OS и ON на GH и $C'D'$.

Получим:

$$OS = C'N = \frac{C'D'}{2}.$$

Отрезок OS равен, следовательно, отрезку ND' на предыдущем рисунке; отсюда

$$GHIJK = MPCQR.$$

Если вместо пятиугольников, вписанных в окружность и описанных около нее, мы будем рассматривать окружности, вписанные в правильный пятиугольник и описанные около него, то обнаружим аналогичную зависимость между площадями (рис. 377).

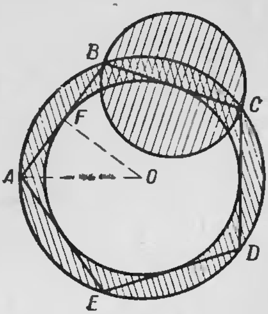


Рис. 377

Пусть OA означает радиус описанной окружности, OF — радиус вписанной окружности. На основе свойств прямоугольного треугольника OFA можем утверждать, что

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 = OF^2 + \frac{AB^2}{4}.$$

Отсюда

$$\pi(OA^2 - OF^2) = \pi\frac{AB^2}{4}.$$

Это означает, что разность площадей окружности, описанной около правильного пятиугольника $ABCDE$, и окружности, вписанной в этот пятиугольник, равняется площади окружности с диаметром, равным стороне этого же пятиугольника.

Интересен способ определения площади треугольника, у которого одна из вершин, например B, недоступна.

При помощи угольника с углом в 60° проводим две прямые BD и EB, сходящиеся в точке B и образующие с прямой AC углы в 60°; треугольник DBE — равносторонний (рис. 378).

Площади треугольников DBE и ABC, имеющих одинаковую высоту, относятся друг к другу, как их основания; следовательно,

$$\triangle ABC = \triangle DBE \cdot \frac{AC}{DE}.$$

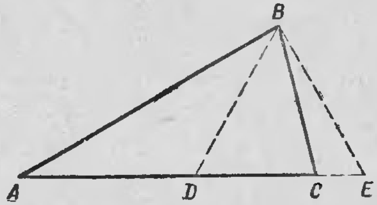


Рис. 378

Но

$$\triangle DBE = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot DE^2.$$

Отсюда

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AC \cdot DE.$$

Значит, достаточно измерить AC и DE, чтобы затем одним перемножением нескольких чисел найти искомую площадь.

Современный итальянский математик инженер Итало Джерси приводит такой сокращенный способ вычисления площади правильного двенадцатиугольника.

Поделим данный многоугольник так, как указано на рисунке 379. В треугольнике ABC сторону AC, равную стороне двенадцатиугольника, обозначим через a, сторону

CB — через b и сторону AB — через c. Очевидно, что $c = \frac{a}{2}$, так как $\angle BAC = 150° - 90° = 60°$, отсюда также $b = \frac{a}{2} = \sqrt{3}$.

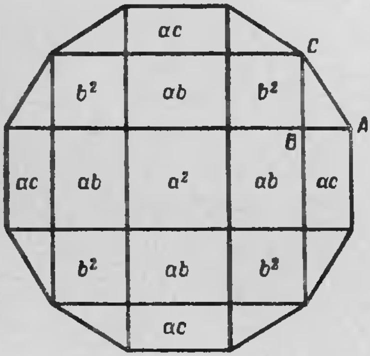


Рис. 379

Вся площадь двенадцатиугольника выразится уравнением:

$$S = a^2 + 4ac + 4b^2 + 4ab + 8\frac{bc}{2}.$$

Отсюда после замены b и c их приведенными выше значениями получим:

$$S = 3a^2(2 + \sqrt{3}).$$

7. Задачи Леонардо да Винчи и Дюрера

Эти задачи мы выделили, так как их авторы этого вполне заслуживают. Об отношении живописи прошлых веков к математике написаны специальные исследования. Геометрия пользовалась особенным успехом и полным признанием среди живописцев, которые превосходно знали перспективу.

Среди рукописей гениального творца «Тайной вечери» и разностороннего ученого Леонардо да Винчи найдено много оригинальных математических заметок и между ними такая геометрическая задача: если проведешь через точки пересечения вписанной в квадрат окружности с диагоналями того же квадрата линию ab и в точке n — точке пересечения линии ab с диаметром fe — начнешь и замкнешь вторую окружность, то поверхность этой маленькой окружности будет равняться поверхности, заключенной между обеими окружностями, и будет наполовину меньше поверхности большей окружности.

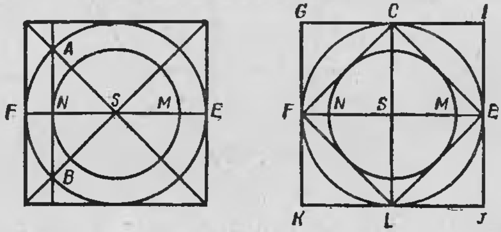


Рис. 380

На рисунке 380 точки обозначены большими буквами. Отрезок SA представляет собой половину диагонали описанного около окружности NM квадрата и равняется SF, то есть половине стороны квадрата, описанного около окружности с диаметром FE.

Таким образом, квадрат $FCEL$ с вершинами, лежащими на срединах сторон квадрата $KGIJ$, имеет в качестве половины диагонали FS, и, значит, $FCEL$ представляет собой квадрат, описанный около окружности с диаметром NM. Но $FCEL$ имеет поверхность, безусловно равную половине $KGIJ$, поскольку вмещает в себя четыре таких же самых треугольника, каких $KGIJ$ вмещает восемь. Отсюда следует, что и поверхность окружности NM равняется половине поверхности окружности EF.

Рис. 381

Альбрехт Дюрер не только в рукописях, но также в картинах и книжках оставил многочисленные следы своего математического таланта и увлечения математикой. Об этом свидетельствует знаменитый дюреровский магический квадрат, помещенный на его «Меланхолии» (рис. 381) и являющийся одним из самых старых магиче-

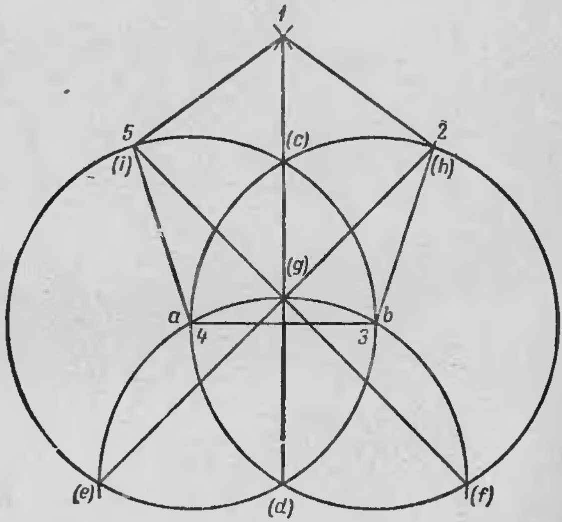


Рис. 382

ских квадратов в Европе. Свидетельствует об этом также одно небольшое произведение Дюрера, в котором гениальный художник приводит очень хороший и легкий способ построения правильного пятиугольника с помощью циркуля, если известна только длина стороны. Воспроизводим рисунок по картине Дюрера с его собственными обозначениями точек буквами a, b и цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 382). Только буквы, взятые в скобки, были дописаны позднее, на основании приложенного к картине авторского текста.

Построение Дюрера не совершенно точное, но для практических целей вполне достаточное. Дюрер осознает это и проводит четкую границу между математически и практически правильными фигурами. Рисунок настолько красноречив, что к нему не требуется никаких пояснений.

Интересно также приведенное в книжке Дюрера построение правильного девятиугольника (рис. 383).

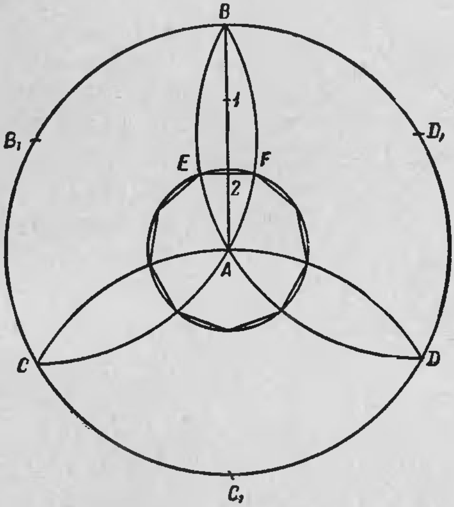


Рис. 383

К этому рисунку следует добавить несколько указаний. Из центра A описывается большой круг, затем таким же самым радиусом следует начертить три дуги из трех вершин — B, C, D — равностороннего треугольника, соединить A и B отрезком, поделить его на три равные части, на $\frac{1}{3}$ расстояния от точки A провести перпендикулярно AB прямую EF. Отрезок EF будет стороной правильного девятиугольника, вписанного в окружность с радиусом $AE = AF$. Нужно сказать, что и здесь построение приближенное.

8. Несколько замечательных способов построения правильных пятиугольников

Раз уж мы занялись задачами, которым математики всех времен уделяли много внимания, — задачами построения правильных многоугольников по их стороне или вписывания их в окружность, когда дан радиус, то уместно будет также привести еще несколько других, более поздних, чем дюреровский, способов построения правильных многоугольников, например пятиугольников.

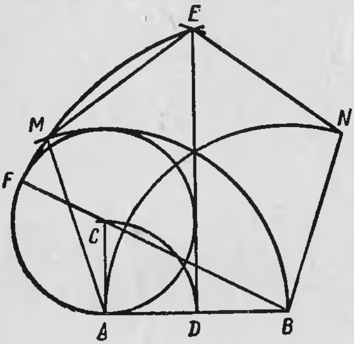


Рис. 384

Дана сторона AB (рис. 384). Из ее середины D, а также из точки A восстанавливаем перпендикуляры. Радиусом AD чертим дугу до пересечения ее с перпендикуляром в точке C. Этим же радиусом из точки C описываем окружность. Через точки B и C проводим прямую линию до пересечения ее с окружностью в точке F. Радиусом BF описываем из точки B дугу FE до ее пересечения с прямой. Точка E будет верхней вершиной пятиугольника. Радиусом AB чертим дугу до пересечения с дугой FE в точке M, которая также будет вершиной пятиугольника. Отыскание пятой вершины, N, не представляет уже никаких трудностей.

А вот способ вписывания правильного пятиугольника в окружность, данный немецким математиком и астрономом Иоганном Шрётером (XVIII век).

Пусть AB и CD будут двумя диаметрами, пересекающимися под прямым углом (рис. 385).

Отрезок Cc, равный $4 \cdot OA$, параллелен AB. Отрезок Dd, равный BO, также параллелен AB. Прямая, соединяющая c и d, пересечет окружность в точках E и F. Соединяем их прямыми с точкой C и из точек пересече-

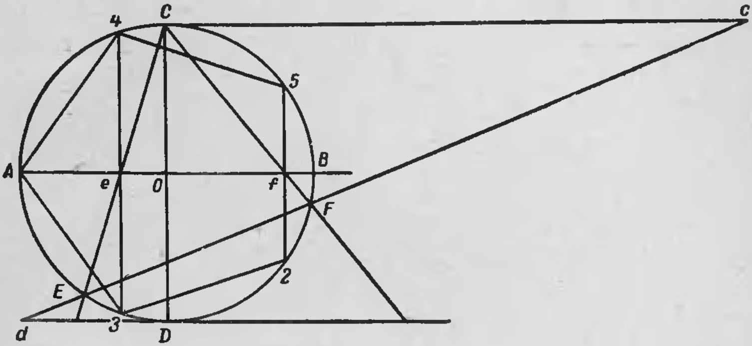


Рис. 385

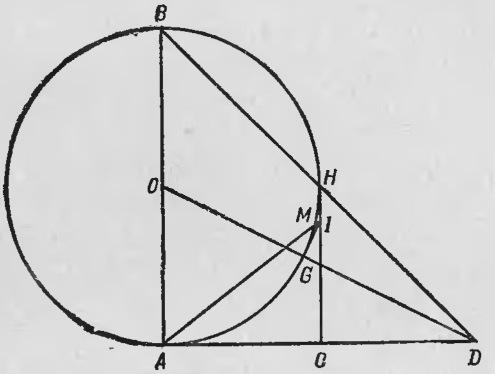


Рис. 386

ния этих прямых с AB. Из точек e и f восстанавливаем перпендикуляры к AB. Точки пересечения перпендикуляров с окружностью и будут всеми четырьмя искомыми вершинами пятиугольника: *2*, *3*, *4*, *5*.

Другое решение того же автора еще более остроумно.

По касательной откладываем радиус AC и диаметр AD (рис. 386). Точку D соединяем с точками O и B; линии

DO и DB пересекут окружность в точках G и H. Затем из точки D как из центра радиусом, равным DG, описываем дугу до пересечения ее с линией CH в точке I. Точку I соединяем с A прямой, которая пересечет окружность в точке M. Хорда AM будет искомой стороной правильного пятиугольника, вписанного в окружность с диаметром AB.

Не слишком сложное доказательство правильности этих фигур, основанное на принципе золотого сечения, оставляем читателю.

9. Ян Брожек из Кужелова

Приведенное собрание фактов из истории математики мы хотим завершить коротким упоминанием о крупнейшем польском математике, каким был краковский академик Ян Брожек из Кужелова (1585—1652).

Имя его стало известно далеко за пределами страны как имя автора ряда исследований в области философии, математики, астрономии — исследований, богатых творческими идеями, раздвинувшими горизонты тогдашних математических знаний.

Это был действительно недюжинный человек с энциклопедически развитым умом, поэт, философ и ученый, интересующийся всеми проблемами своей эпохи, чуткий ко всему новому, прогрессивному.

В области математики Брожек занимался, если называть вопросы, затронутые в этой книжке, числами совершенными и содружественными; он первый сообщил о двух новых содружественных числах: 18 416 и 17 296; широко и самостоятельно изложил проблему строения пчелиных ячеек; первый в Польше ввел в употребление таблицы Непера и многое другое.

Самая богатая новыми математическими идеями работа Брожека, «Апология Аристотеля и Евклида», была издана уже в самом конце его жизни. В ней приводится несколько новых положений из области геометрии, обогащается также свежими методами сильно запущенный раздел геометрии о звездных многоугольниках.

Брожек первый доказал, что между вписанными звездными многоугольниками с нечетным числом вершин

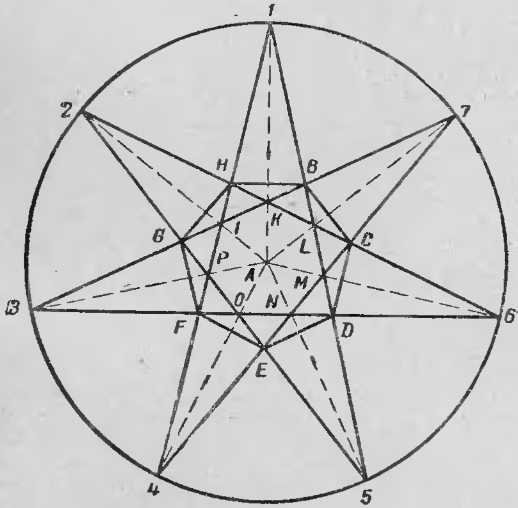


Рис. 387

существует всегда одна разновидность, сумма углов которой равняется двум прямым углам.

Брожек первый дал способ построения разного рода звездных многоугольников с данным числом вершин. Он нашел совершенно новый способ образования правильных многоугольников из одного многоугольника с тем же самым числом вершин. Этот способ получил название *трансформации.*

Первое из отмеченных здесь положений Брожек доказал сначала на звездном семиугольнике, а затем распространил доказательство на другие звездные многоугольники. Он разделил окружность на семь равных частей и, начиная от точки *1*, соединял каждую третью точку (рис. 387). Образовался звездный семиугольник, у которого сумма внутренних углов *1A2*, *2A3*, ..., *7A1* составляет четыре прямых угла, а поскольку каждый вписанный угол равняется половине соответствующего центрального угла, то и сумма всех семи углов звездного многоугольника равняется двум прямым углам.

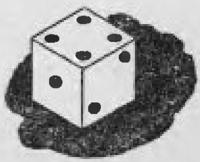
Подобным образом можно поступить с девятиугольником, с одиннадцатиугольником и т. д.

X. ИГРЫ, РАЗВЛЕЧЕНИЯ, ГОЛОВОЛОМКИ

Здесь мы рассмотрим снова с математической точки зрения ряд игр, которых мы уже касались, чтобы сделать некоторые интересные добавления. Первое же место будет отведено тем играм, которых мы до сих пор совершенно не касались.

1. Кости

По «возрасту» игр основное место должно быть отведено игре в кости. Игра эта не только одна из самых старых на свете, но и одна из самых простых. Она представляет такое ограниченное поле для размышлений, что многие из читателей, наверное, удивятся, как можно в применении к игре в кости говорить о каких-то математических комбинациях.



Правда, их немного, но есть среди них довольно интересные. Основаны все они на том принципе, что на противоположных стенках кубика помещают всегда числа, дополняющие друг друга до 7, то есть 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4.

Изложение каждой из трех разбираемых ниже комбинаций начнем с конкретного примера, который лучше всего пояснит суть дела, и только после этого перейдем к общему виду комбинации. Представим себе двух игроков A и B.

A бросает две кости; B, не видя их, должен отгадать число очков на каждой из них.

На костях выпали числа 5 и 4.

B просит, чтобы A открыл первую кость и число на нижней стенке прибавил к верхнему числу второй кости: $2 + 4 = 6$. Затем пусть определит сумму чисел на нижних стенках обеих костей и назовет результаты.

A называет два полученных в результате этих действий числа: 6 и 5.

B суммирует эти числа ($6 + 5 = 11$), полученную сумму вычитает из 21 ($21 - 11 = 10$), разность делит на 2 ($10 : 2 = 5$) и получает число очков первой кости: 5. Затем первое из сообщенных ему чисел прибавляет к 7 ($7 + 6 = 13$), из суммы вычитает второе сообщенное число ($13 - 5 = 8$) и, разделив на вторую разность ($8 : 2 = 4$), получает число очков второй кости: 4.

В общем виде. Число выпавших очков: a и b. Первая сумма: $7 - a + b$; вторая сумма: $7 - a + 7 - b$, то есть $14 - a - b$; сумма этих сумм: $(7 - a + b) + (14 - a - b)$, то есть $21 - 2a$, и т. д.

2. «Отшельник»

Эта одна из древних и очень интересных игр обладает тем большим достоинством, что ее можно легко сделать и что в нее можно играть без партнеров, одному. Отсюда и название — «отшельник».

В деревянной дощечке нужно сделать 33 таких углубления, чтобы в них поместились стеклянные шарики (рис. 388). Вместо округлых лунок можно также просверлить столько же дырок для втыкания в них колышков. Обозначим отдельные углубления двузначными числами таким образом, чтобы первая цифра числа означала номер вертикальной колонки, считая слева, а вторая цифра — горизонтальный. ряд, считая снизу.

Одно углубление в начале игры должно быть свободно, в остальных же располагаются колышки или шарики. Игра состоит в том, чтобы «бить» одни колышки перескакиванием через них на свободную клетку других колышков

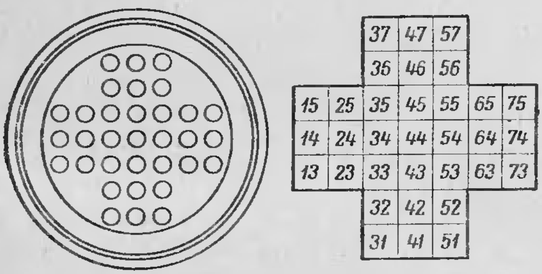


Рис. 388

в горизонтальном или вертикальном направлении до тех пор, пока из всех 32 колышков на доске останется только один колышек в конце. Иных ходов, кроме перескакивания одного колышка через другой по прямой линии на пустое место, игра не признает. Если свободно, например, место 44, то возможны следующие движения: с 24 на 44, с 46 на 44, с 64 на 44 и с 42 на 44.

Ходы эти, вернее, перескоки будем обозначать дробями:

$$\frac{24}{44}, \frac{46}{44}, \frac{64}{44}, \frac{42}{44}.$$

При каждом из этих четырех возможных ходов освобождается одно место, так как выбывает из игры колышек, через который «совершил прыжок» соседний колышек; следовательно, в данном случае будет убран колышек, занимающий положение 34, или 45, или 54, или 43.

Дополнительным условием игры, усложняющим ее, но также и делающим ее более интересной, будет, например, условие, какое положение должен занять последний колышек своим последним ходом.

Можно заполнить всю доску 32 фигурами, но можно также выделить только две некоторые ее части.

Интересную, но довольно сложную общую теорию «отшельника» мы не излагаем. Вместо этого приведем несколько партий для примера.

I. Свободное место: 44. Последний колышек — в этом же месте.

$$\frac{64}{44}\;\frac{56}{54}\;\frac{44}{64}\;\frac{52}{54}\;\frac{73}{53}\;\frac{75}{73}\;\frac{43}{63}\;\frac{73}{53}\;\frac{54}{52}\;\frac{35}{55}\;\frac{65}{45}$$

$$\frac{15}{35}\;\frac{45}{25}\;\frac{37}{35}\;\frac{57}{37}\;\frac{34}{36}\;\frac{37}{35}\;\frac{25}{45}\;\frac{46}{44}\;\frac{23}{43}\;\frac{31}{33}\;\frac{43}{23}$$

$$\frac{51}{31}\;\frac{52}{32}\;\frac{31}{33}\;\frac{14}{34}\;\frac{34}{32}\;\frac{13}{33}\;\frac{32}{34}\;\frac{34}{54}\;\frac{64}{44}$$

II. Свободное место: 74. Последний колышек — в лунке 47.

$$\frac{54}{74}\;\frac{52}{54}\;\frac{44}{64}\;\frac{73}{53}\;\frac{74}{54}\;\frac{54}{52}\;\frac{51}{53}\;\frac{31}{51}\;\frac{32}{52}\;\frac{43}{63}\;\frac{51}{53}$$

$$\frac{63}{43}\;\frac{34}{32}\;\frac{13}{33}\;\frac{15}{13}\;\frac{43}{23}\;\frac{13}{33}\;\frac{32}{34}\;\frac{56}{54}\;\frac{75}{55}\;\frac{54}{56}\;\frac{57}{55}$$

$$\frac{37}{57}\;\frac{36}{56}\;\frac{45}{65}\;\frac{57}{55}\;\frac{65}{45}\;\frac{24}{44}\;\frac{44}{46}\;\frac{25}{45}\;\frac{45}{47}$$

III. Крест из девяти колышков. Свободное место: 41 (рис. 389).

$$\frac{43}{41}\;\frac{45}{43}\;\frac{24}{44}\;\frac{44}{42}$$

$$\frac{64}{44}\;\frac{41}{43}\;\frac{43}{45}\;\frac{46}{44}$$

IV. Пирамида. Свободное место: 53 (рис. 390).

$$\frac{55}{53}\ \frac{74}{54}\ \frac{53}{55}\ \frac{55}{57}$$

$$\frac{57}{37}\ \frac{35}{33}\ \frac{14}{34}\ \frac{33}{35}$$

$$\frac{36}{56}\ \frac{44}{46}\ \frac{56}{36}\ \frac{25}{45}$$

$$\frac{37}{35}\ \frac{35}{55}\ \frac{65}{45}$$

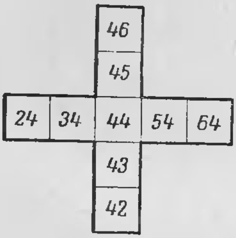


Рис. 389

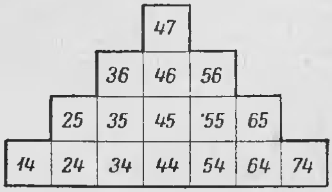


Рис. 390

«Отшельник» имеет громадное количество комбинаций, поэтому является игрой, которая не скоро надоедает.

3. Домино

Интересно узнать, сколько может дать различных комбинаций домино, составленное из 28 камней, при применении обычных правил игры. Оказывается, что оно может дать 3 979 614 965 760 разных комбинаций. Очевидно, однообразной эту игру не назовешь.

Но вот несколько оригинальных соображений, расширяющих еще больше возможности домино.

На рисунке 391 изображено шесть камней, уложенных по обычным правилам игры и образующих числами своих очков арифметическую прогрессию с разностью единица, а именно: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Возникает вопрос: сколько таких арифметических прогрессий (с разностью единица или два) можно образовать из шести камней домино?

Кто-то подсчитал, что из 28 камней домино можно уложить 20 прогрессий с разностью единица и три про-

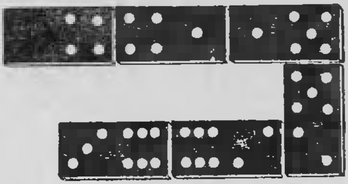


Рис. 391

грессии с разностью два. Всех прогрессий, следовательно, может быть только 23.

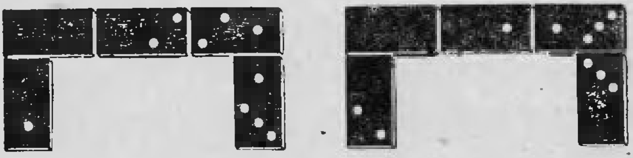


Рис. 392

Если кто-нибудь считает, что это слишком маленькая цифра, пусть попробует найти другие комбинации. Данные 23-го ряда начинаются с камней (0—0), (0—1), (1—0), (0—2), (1—1), (2—0), (0—3), (1—2), (2—1), (3—0), (0—4), (1—3), (2—2), (3—1), (1—4), (2—3), (3—2), (2—4), (3—3) или (3—4) для прогрессий с разностью единица и с камней (0—0), (0—1) или (0—2) для прогрессий с разностью два.

В изображенных на левом рисунке 392 пяти камнях сумма очков средних камней равна 5, а сумма очков всех камней составляет 10. Сколько может быть различных комбинаций, отвечающих данным условиям? Кажется, только четыре, а именно (рис. 393):

(1 — 0), (0 — 0), (0 — 2), (2 — 1), (1 — 3),

(2 — 0), (0 — 0), (0 — 1), (1 — 3), (3 — 0),

(3 — 0), (0 — 0), (0 — 2), (2 — 1), (1 — 1),

(4 — 0), (0 — 0), (0 — 2), (2 — 1), (1 — 0).

Если не верите, поищите другие комбинации.

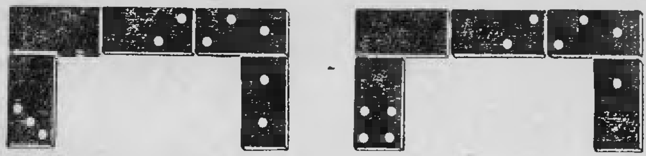


Рис. 393

Попробуйте это задание расширить так, чтобы получить 6 или 7 очков в трех средних камнях при 12 или 14 очках во всех пяти камнях.

Весь комплект домино (28 камней) уложен в виде квадратной рамки (рис. 394), однако в соответствии с правилами игры. Легко убедиться, что сумма очков верхнего ряда и левой колонки составляет 44, нижнего ряда — 59, а правой колонки — 32.

Задание состоит в перегруппировании камней таким образом, чтобы сумма очков каждой из четырех сторон равнялась 44. При этом, конечно, должны быть соблюдены правила игры. Чтобы немного облегчить это задание, примем следующее условие: сумма очков всех четырех половинок угловых камней, которые в этой комбинации считаются двукратно, всегда должна составлять 8, потому что всех очков в 28 камнях насчитывается 168, а $4 \cdot 44 = 176$. Различных решений очень много.

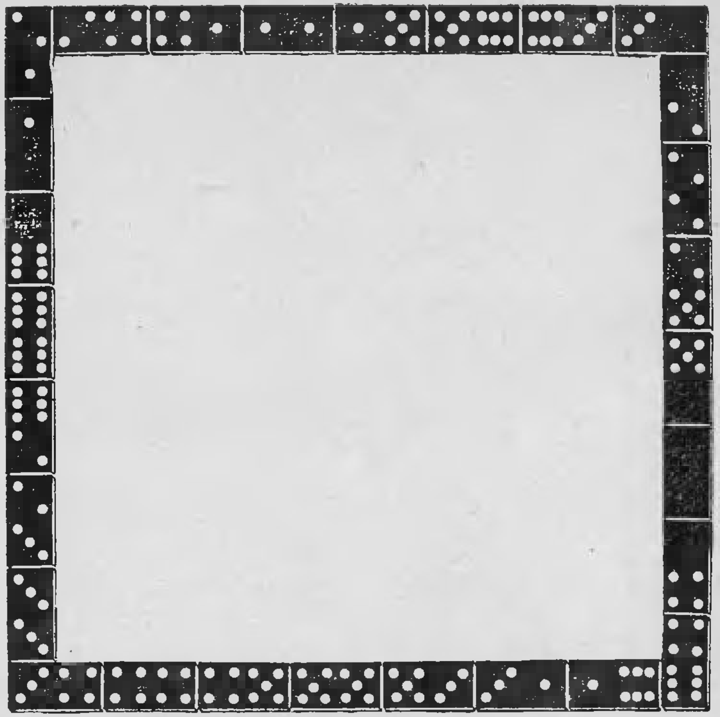


Рис. 394

Поскольку мы в этой книжке идем по следам Пифагора, в завершение приведем еще одно интересное доказательство его великой теоремы о том, что квадрат гипотенузы равняется сумме квадратов катетов.

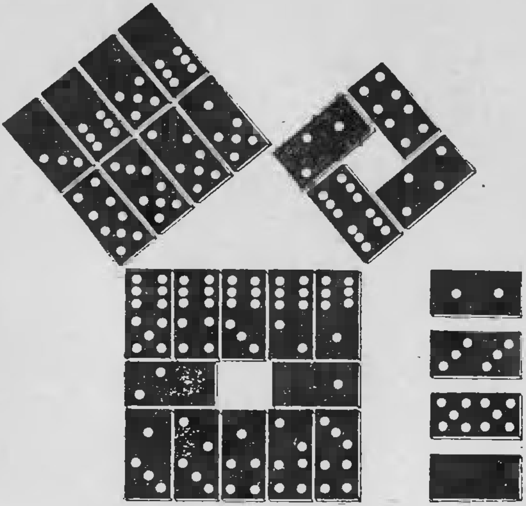


Рис. 395

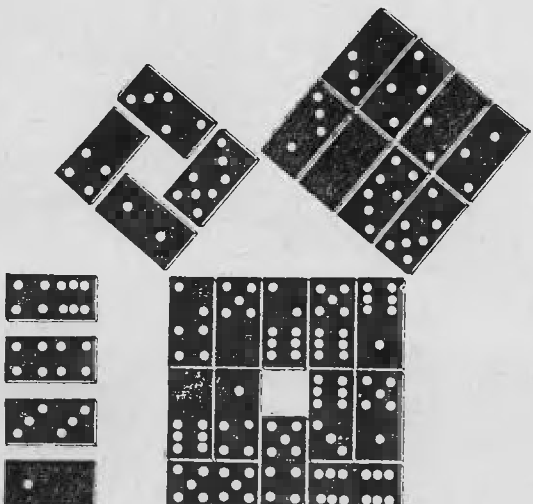


Рис. 396

Доказательство такое можно бы назвать доказательством «доминовым». Приведенные здесь рисунки 395 и 396 объяснений не требуют.

4. Головоломки

Количество существующих головоломок, особенно геометрических, безмерно, так что поистине трудно выбирать между ними.

Поэтому здесь мы приведем лишь несколько наиболее интересных с точки зрения математики.

А. Разделение ковра

Три сестры получили в наследство квадратный ковер, ценный как семейная реликвия; поэтому они решили поделить его так, чтобы каждая получила квадратный коврик (рис. 397). Как это сделать? Обсуждали долго и старательно. Намеревались уже отказаться от равного деления и решили, что две сестры-близнецы возьмут по $\frac{4}{9}$ ковра, а третья, младшая, получит $\frac{1}{9}$ ковра. Нарисовали даже три способа деления этого ковра (рис. 398): одна возьмет больший квадрат, вторая сошьет такой самый квадрат из двух частей (A и A), а третья получит маленький квадратик.

Рис. 397

Но один ловкий математик утешил опечаленных женщин, разделив ковер на шесть частей, из которых можно было сшить три совершенно равных квадрата.

Как он это сделал, хорошо видно из рисунка 399, особенно если учесть, что острый угол в прямоугольном треугольнике *4* равен 30° и что большее основание, а также

Рис. 398

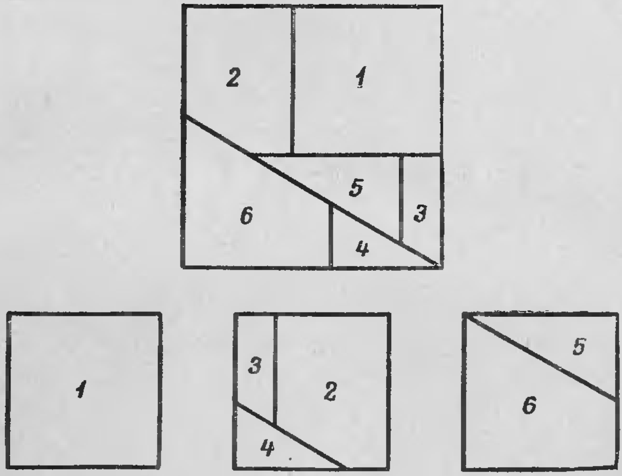


Рис. 399

высота трапеции *б* равняются стороне каждого из этих трех маленьких квадратных ковриков.

Одна из сестер получила свой ковер в одном куске, а остальным сестрам пришлось свои ковры сшивать.

Однако случилось так, что именно той сестре, которая получила целый коврик, нравился больше прямоугольный ковер со сторонами, относящимися друг к другу, как 9 : 16. И это желание математик сумел выполнить, даже двумя способами, а как именно, попробуйте догадаться сами (рис. 400).

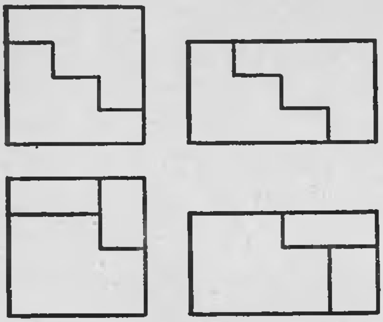


Рис. 400

Б. Локулюс Архимеда

В одной арабской математической книге рассказывается, что Архимед изобрел очень интересное деление квадрата на 14 частей, из которых каждая выражается дробью с общим для всех знаменателем 48.

На левом рисунке 401 изображен способ выполнения этого деления, а на соседнем рисунке приведены числители этих дробей.

Если квадрат *ABCD* принять за единицу, то получим:

$$\text{треугольник} \quad AJD = \frac{4}{48},$$

$$\text{треугольник} \quad PMH = \frac{1}{48},$$

$$\text{четырехугольник} \quad FBGN = \frac{8}{48},$$

и т. д.

Интересны головоломки, состоящие в сгруппировании этих частей (без изменения их положения) таким образом, чтобы:

1) квадрат оказался поделенным на 3 равные части, каждая по $\frac{16}{48}$;

2) квадрат оказался поделенным на 6 равных частей, каждая по $\frac{8}{48}$;

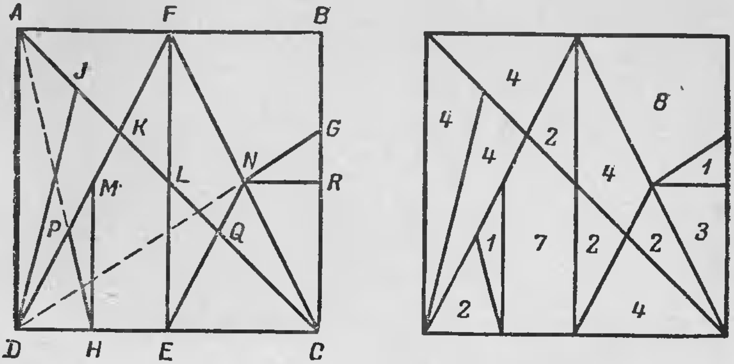


Рис. 401

3) квадрат оказался поделенным на 3 такие части, числители которых были бы числами, идущими друг за другом, то есть $\frac{15}{48}$, $\frac{16}{48}$ и $\frac{17}{48}$;

4) квадрат оказался поделенным на 9 таких частей, числители дробей которых составляли бы натуральный ряд чисел от 1 до 8, а также число 12.

В. Как переделать равносторонний треугольник в квадрат, пользуясь при этом минимальным числом делений треугольника на части

Решение, изображенное на рисунке 402, является превосходным, но нелегким. Рисунок требует некоторых пояснений. Делим пополам AB и BC и получаем точки D и E. Медиану AE продолжаем и откладываем на ней $EF = EB$. Делим AF пополам и из точки G как центра описываем полукруг AHF. Продолжим CB до H и из точки

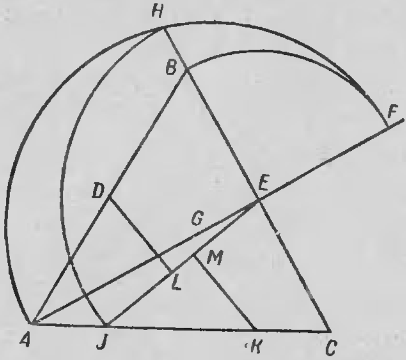


Рис. 402

Рис. 403

E радиусом EH описываем дугу HJ. Откладываем $JK = BE$. Дальнейший ход деления уже совершенно ясен.

Веселый фокусник предлагает разделить треугольный кусок доски тремя сечениями на такие четыре части, из которых можно было бы составить квадрат (рис. 403).

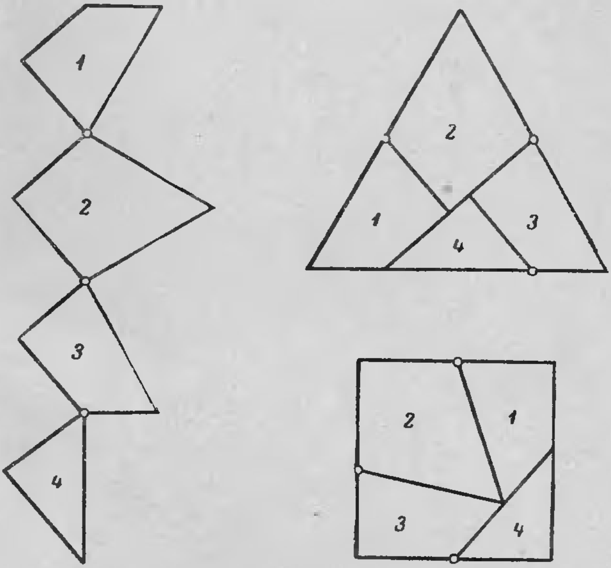


Рис. 404

Введем для предыдущего чертежа (рис. 402) обозначения:

фигура *1* — это четырехугольник $JADL$,
» *2* — » четырехугольник $DBEL$,
» *3* — » четырехугольник $ECKM$,
» *4* — » треугольник KJM.

Если доска будет довольно толстой, можно в трех точках, D, E и K, приделать небольшие петельки. Получится цепь из четырех неправильной формы кусков. Можно составить из них квадрат и равносторонний треугольник, как это видно по рисунку 404.

Г. Как переделать правильный шестиугольник в квадрат

Прежде всего нужно составить из двух половинок шестиугольника *ABCD* и *BCEF* параллелограмм *AFED* (рис. 405). На отрезке *AF*, как на диаметре, описываем

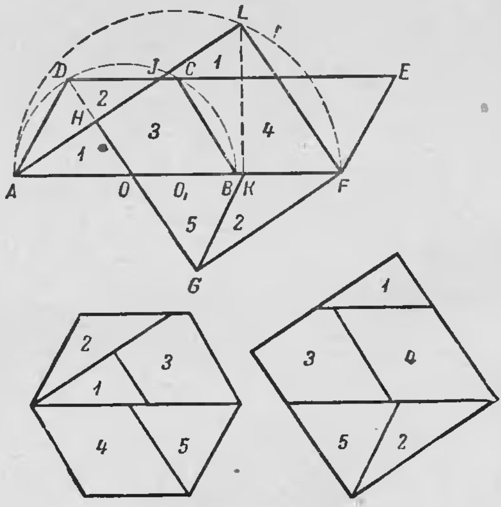


Рис. 405

полукруг; из точки *F* радиусом, равным средней геометрической *AF* и высоты параллелограмма, проводим дугу до пересечения с полукругом в точке *L*.

Дальнейший ход деления уже ясен.

Д. Переделывание правильного пятиугольника в квадрат — более сложное дело

Продолжим диагональ *CA* и отложим *AF* = *AB* (рис. 406); соединяем точки *F* и *E*. Трапеция *FEDC* равнозначна с пятиугольником *ABCDE*.

Через точку H, лежащую посередине FE, проводим прямую GJ, параллельную CD.

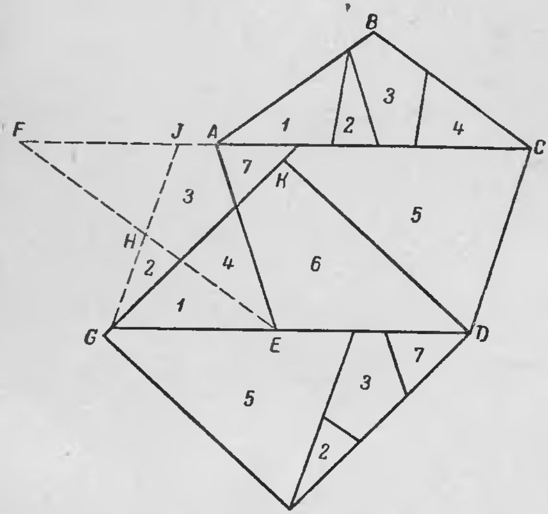


Рис. 406

Параллелограмм $JGDC$ равноценен с первоначальным пятиугольником. Поэтому дальше уже поступаем так, как в предыдущем задании.

5. Путешествие по шахматной доске, додекаэдру и другие путешествия

А. Прогулка по полям шахматной доски

На одном из белых полей шахматной доски, как на балконе дома, сидит прекрасная Джульетта, на другом — Ромео.

Джульетта с нетерпением ожидает прихода Ромео, который не помнит, где расположен белый дом его избранницы. Поэтому он решает обойти все дома, но дорогой самой короткой и с наименьшим числом поворотов. Попробуйте убедить его, что он выбрал не ту дорогу (рис. 407).

На другой день Ромео уже хорошо помнил, что дом, на балконе которого его ждала Джульетта, был белый.

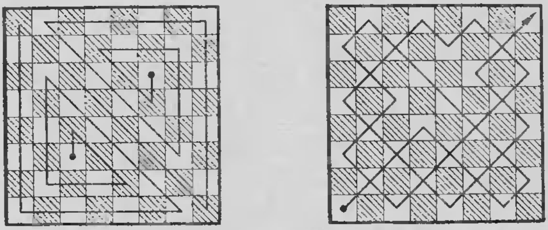


Рис. 407

Поэтому он стал обходить все темные дома и входить только во все белые, чтобы, наконец, на третий день... ориентироваться уже точно.

Б. Игра Гамильтона

Вильям Гамильтон, английский математик и астроном первой половины XIX века, изобрел очень интересную игру, называемую путешествием по додекаэдру.

Путешествие это заключается в том, чтобы один раз пройтись по всем наугольникам додекаэдра и вернуться к наугольнику, из которого вы вышли.

Если мы вышли из какого-нибудь наугольника по его краю и приближаемся к другому наугольнику, то перед нами встает вопрос: идти направо или налево?

В этом и заключается суть дела.

Вот два решения задачи, а точнее — две разновидности одного решения:

$$ppplllplplppplllplp,$$

или

lllppplplplllppplpl.

Буква *p* означает поворот направо, *l* — налево.

Кто не сделал себе макета двенадцатигранника или не имеет его под рукой, может совершить это путешествие

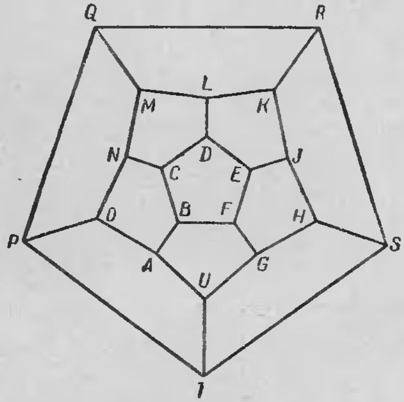


Рис. 408

на приложенной схеме согласно такому расписанию движения (рис. 408):

GFBAUTPONCDEJKLMQRSHG

или

GFBAUTSRKLMQPONCDEJHG

B. Посещение пяти островов

Для того, кто совершил путешествие по додекаэдру, не будет слишком трудным делом показать кораблю, стоящему на якоре у одного из пяти островов, каким путем объехать их все и возвратиться в порт, из которого он вышел, с тем условием, что по всем обозначенным линиям корабль пройдет только один раз и навестит каждый остров тоже только один раз (рис. 409).

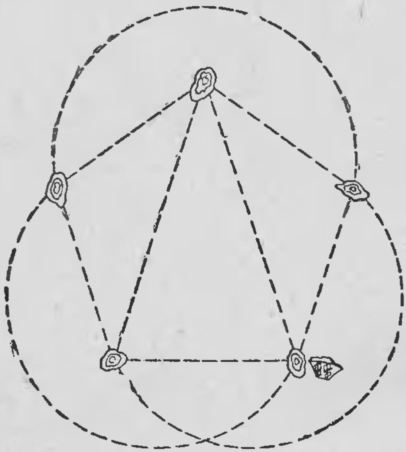


Рис. 409

Решений у этой задачи довольно много.

ОТВЕТЫ

Приводим ответы для некоторых задач:

Стр. 49. — Стебель лотоса.

Глубина воды в первой задаче равна $3\frac{3}{4}$ локтя, в другой задаче — 12 футам.

Стр. 49. — Прыжок обезьяны.

Высотой в 30 локтей.

Стр. 64. — Кому сколько лет.

Терезе $1\frac{3}{4}$ года, Ясю $3\frac{1}{2}$ года, Нелле $5\frac{1}{4}$ года, Славику 10 лет, Вере 21 год.

Стр. 68. — Разные задачи.

I. 12 кроликов и 23 курицы.
II. После 75 прыжков.
III. 30 слив.
IV. Через 60 дней зарастет четверть озера, через 62 дня — половина, а через 64 дня — все озеро.

СЛОВАРЬ

Алкуин (ок. 735—804) — средневековый ученый, учитель императора Карла Великого. В кругу ученых при дворе Карла был известен под именем Альбина. Ему принадлежит ряд сочинений по философии, математике, риторике, грамматике. Задачники по арифметике были им составлены в форме загадок.

Аполлоний Пергский (ок. II в. до н. э.) — один из наиболее замечательных математиков Александрийской школы. Важнейшим его трудом является сочинение о конических сечениях. Из положений Аполлония исходили при создании аналитической геометрии Декарт и Ферма́.

Ариабхата (р. 476 — год смерти неизвестен) — индусский астроном и математик. В его сочинениях по астрономии и математике встречаются извлечения квадратного и кубических корней, простые задачи на составление и решение уравнений.

Архимед (ок. 287—212 до н. э.) — величайший математик и механик Древней Греции. Он получил образование у своего отца — астронома и математика Фидия. Архимед определил площади, поверхности и объемы различных фигур и тел посредством разработанных им методов, которые впоследствии развились в интегральное исчисление.

Архитрав — главная (нижняя) балка, перекрывающая пролет между колоннами.

Вильсон, Чарлз Томас Рис (р. 1869) — английский физик, профессор Кэмбриджского университета. В 1912 году изобрел прибор (камера Вильсона), с помощью которого можно наблюдать следы летящих частиц.

Геродот (ок. 484—425 до н. э.)—древнегреческий историк, автор сочинения «История греко-персидских войн», которое отличается широтой замысла, мастерством изложения и содержит элементы исторической критики. Некоторые изложенные Геродотом факты казались вымыслом, но впоследствии подтвердились археологическими находками.

Гарсдерфер, Георгий Филипп (1607—1658)—немецкий поэт, оставивший 50 томов различных сочинений на немецком и латинском языках, написанных в разговорной форме. Сочинения представляют собой своеобразную экспедицию по различным отраслям знаний.

Гаусс, Карл Фридрих (1777—1855) — крупнейший немецкий математик и астроном. Разработал метод построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки.

Декарт, Рене (Картезий) (1596—1650)—выдающийся французский философ, физик, математик, физиолог. Впервые в науке ввел в математике понятие переменной величины и функции, создал метод прямолинейных координат. Декарт считал математику идеалом и образцом всех наук.

Диофант (ок. III в. н. э.)—греческий математик из Александрии, автор трактата «Арифметика» (сохранилось 6 книг из 13, а также отрывки из книги о многоугольных числах). Диофант решал уравнения четвертой степени. Его сочинения легли в основу исследований П. Ферма́ и Л. Эйлера.

Дюрер, Альбрехт (1471—1528)—великий немецкий живописец, гравер и рисовальщик.

Евтропий (IV в. н. э.) — римский историк.

Зенон Элейский (ок. 500 до н. э.)—древнегреческий философ, утверждавший, что быстроногий Ахиллес (мифический герой) никогда не догонит черепаху.

Кантор, Мориц (1829—1920)—немецкий историк математических наук. Труд Кантора «Лекции по истории математики» содержит богатый справочный материал по истории математики и охватывает период от древнейших времен до 1799 года. В основу классификации материала положен хронологический принцип.

Лейбниц, Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий ученый, великий математик. Важнейшая заслуга в области математики — разработка дифференциального и интегрального исчислений.

Лежандр, Адриен Мари (1752—1833) — французский математик. Обосновал и развил теорию геодезических измерений. В математическом анализе ввел простейшие из сферических функций, исследовал Эйлеровы интегралы.

Маклорен, Колин (1698—1746) — шотландский математик, ученик и последователь И. Ньютона.

Нéпер, Джон (1550—1617) — шотландский математик, изобретатель логарифмов. Открытие Непера сыграло огромную роль в развитии техники вычислений. Ему принадлежит также ряд удобных для логарифмирования формул решения сферических треугольников.

Ньютон, Исаак (1642—1727) — гениальный английский физик, механик, астроном и математик. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения и разработал (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление.

Окань, Морис (1862—1938) — французский математик. Известен работами по номографии. Открыл общий метод построения номограмм из выравненных точек, положил начало общей теории номографических построений.

Папп Александрийский — древнегреческий математик 2-й половины III в. н. э., автор труда «Математическое собрание» в 8 книгах. До нас дошли последние 6 книг. Сочинение Паппа — ценный источник по истории греческой математики эллинской эпохи.

Парфенон — храм богини Афины в Афинах, величайший памятник древнегреческого искусства. Построен в 447—438 годах до н. э.

Паскаль, Блез (1623—1662) — выдающийся французский математик, физик и философ. Сконструировал счетную машину, нашел общий признак делимости любого целого числа на любое другое целое число, дал способ нахождения сочетаний из n элементов по m.

Пирамида Хеопса — построена в период правления египетского фараона Хеопса (начало 3-го тысячелетия до н. э.). Пирамида находится у современного селения Гиза, высота пирамиды 146,5 м. Вскоре после смерти Хеопса пирамида была ограблена и мумия Хеопса уничтожена.

Пирамида Хефрена — построена египетским фараоном Хефреном, братом Хеопса. Пирамида находится рядом с пирамидой Хеопса, высота ее 138,4 м. Около пирамиды из скалы высечен гигантский сфинкс с телом льва и головой человека.

Плиний Старший, Гай Секунд (23—79) — видный римский ученый и писатель, автор работы «Естественная история» (37 книг) — свода знаний того времени по астрономии, физике, географии, зоологии, ботанике, медицине и другим наукам. Плиний погиб во время извержения Везувия.

Плутарх (ок. 46—126) — древнегреческий писатель-моралист. Его сочинения являются важнейшим источником сведений по греческой философии.

Птолемей, Клавдий (II в. н. э.) — знаменитый древнегреческий ученый, сочинения которого имели огромное значение для развития многих наук, особенно астрономии, географии и оптики. Птолемей определил более точно значение π, вычислил таблицу синусов, которая в течение многих веков служила единственным вспомогательным средством для решения треугольников.

Реомюр, Рене Антуан (1683—1757) — французский естествоиспытатель, автор работ по физике, химии, зоологии, ботанике и другим наукам. Изобрел спиртовой термометр со шкалой, разделенной на 80°.

Силлогизм — одна из форм умозаключения, когда из двух данных суждений вытекает третье.

Фалес Милетский (VII—VI в. до н. э.) — древнегреческий ученый и мыслитель, родоначальник греческой стихийно материалистической философии. С именем Фалеса связывается ряд открытий по арифметике, геометрии, астрономии. Он определил продолжительность года в 365 дней и впервые в Греции предсказал солнечное затмение.

Ферма́, Пьер (1601—1665) — крупный французский математик, один из создателей теории чисел. В геометрии Ферма раньше

Декарта и в более систематической форме развил метод координат. В трудах Ферма получили систематическое развитие оба основных процесса бесконечно малых — дифференцирование и интегрирование, но он не обнаружил связи между этими процессами. Эта связь была установлена Г. Лейбницем и И. Ньютоном.

Фибоначчи, Леонардо (ок. 1170—после 1228)—итальянский математик (Леонардо Пизанский). Путешествуя по Востоку, Леонардо познакомился с достижениями арабской математики. Его труды способствовали передаче этих достижений на Запад. Основные работы Леонардо — трактаты по арифметике и алгебре, а труд «Практическая геометрия» — первое произведение, содержащее задачи на приложение алгебры к геометрии.

Эйлер, Леонард (1707—1783)—великий математик, механик и физик. Родился в Базеле. С 1727—1741 года и с 1766 года до конца жизни жил в Петербурге. Круг знаний Эйлера был необычайно широк и охватывал все отделы современной ему математики и механики, математическую физику, оптику, теорию машин, баллистику, теорию музыки и др. Главным трудом Эйлера как математика являлась разработка математического анализа, рамки которого он значительно расширил по сравнению со своими предшественниками — И. Ньютоном, Г. Лейбницем и др.

ОГЛАВЛЕНИЕ

К ЧИТАТЕЛЯМ

Издательство просит отзывы об этой книге присылать по адресу: Москва, А-47, ул. Горького, 43. Дом детской книги.

Для старшего возраста

Щепан Еленьский

ПО СЛЕДАМ ПИФАГОРА

* * *

Ответственный редактор *Э. П. Микоян*
Художественный редактор *Е. М. Гуркова*
Технический редактор *С. Г. Маркович*
Корректоры *Л. И. Гусева* и *Г. С. Муковозова*

* *

Сдано в набор 11/XI 1960 г. Подписано к печати 28/VI 1961 г. Формат 84 × 108[1]/32. 15,25 печ. л. = 25,62 усл. печ. л. (17,44 уч.-изд. л.). Тираж 100 000 экз. Цена 62 коп.

Детгиз. Москва. М. Черкасский пер., 1.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26. Заказ № 1477.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ДЕТСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ
РСФСР

Цена 62 коп.