ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

ОДНИМ

РОСЧЕРКОМ

ЛЕНИНГРАД · 1946

Дом занимательной науки

ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

Вычерчивание фигур одной непрерывной линией

С 17 РИС.

Составил Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

1940

Сдано в набор 3/I—1940 г.
Подп. к печ. 20/II—940 г.
Ленгорлит № 933
Заказ 12[illegible] тираж 200.000

Отв. редактор *В. А. Камецкий*

Техредактор *М. П. Бронштейн*

Тип. „Сестрорецкий печатник"

Задача о Кенигсбергских мостах

Внимание гениального математика Эйлера привлекла однажды своеобразная задача, которую он высказал в такой форме:

„В Кенигсберге есть остров, называемый Кнейпгоф. Река, омывающая его, делится на два рукава (см. рис.), через которые перекинуто семь мостов: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. g

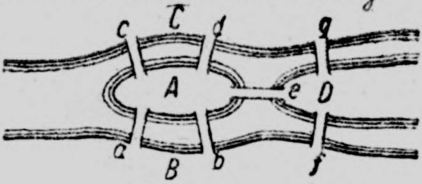


Рис. 1

„Можно ли обойти все эти мосты не побывав ни на одном из них более раза?

„Некоторые утверждают, что это возможно. Другие, напротив, находят такое требование неосуществимым“.

Каково же ваше мнение, читатель?

Что такое топология?

Задаче о Кенигсбергских мостах Эйлер посвятил целое математическое исследование, которое было в 1736 г. представлено в Петербургскую Академию наук. Работа эта начинается следующими строками, определяющими, к какой области математики относятся подобные вопросы:

„Кроме той отрасли геометрии, которая рассматривает величины и способы измерения и которая тщательно разрабатывалась еще в древности, Лейбниц первый упомянул о другой отрасли, названной им „геометрией положения". Эта отрасль геометрии занимается только порядком расположения частей фигуры друг относительно друга, отвлекаясь от их размеров. *)

---

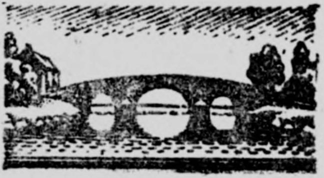
*) В наше время эту отрасль высшей геометрии принято называть „топологией"; она развилась в обширную математическую науку.

Задачи, предлагаемые в этой книжечке, относятся к области, составляющей лишь небольшую часть науки топологии.

„Недавно мне пришлось слышать об одной задаче, относящейся к геометрии положения, и я решил изложить здесь, в виде примера найденный мною способ решения этой задачи".

Эйлер имеет в виду задачу о Кенигсбергских мостах.

Рассуждений великого математика мы здесь излагать не станем, а ограничимся сейчас краткими соображениями, подтверждающими его окончательный вывод. Он состоит в том, что требуемый задачей обход невыполним.



Разбор задачи

Для наглядности заменим рисунок расположения речных рукавов упрощенной схемой (см. рис.). В предложенной задаче размер острова и длина мостов никакого зна-

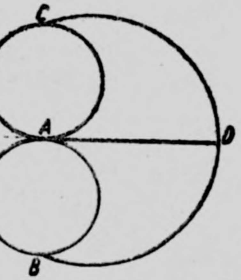


Рис. 2

чения не имеет (такова, мы знаем, характерная особенность всех топологических задач: они не зависят от относительных размеров частей фигуры).

Поэтому мы можем местности *A,B, C,D*.(рис. 1) заменить на схеме точками соответствующего наименования, в которых встречаются пути обхода. Задача сводится теперь, как видим, к тому, чтобы начертить фигуру 2 одним росчерком, не отрывая пера от бумаги и не проводя ни одной линии дважды.

Покажем, что фигуру нашу начертить одним росчерком нельзя. В самом деле, в каждую из узловых точек A, B, C, D, надо притти по одному из путей и затем эту точку покинуть по другому пути; исключение составляет только начальная и конечная точки: в первую не надо ниоткуда приходить, вторую нет надобности покидать. Значит, для возможности непрерывного обхода нашей фигуры необходимо, чтобы во всех узловых точках, кроме двух, сходилось либо по 2, либо по 4 пути, — вообще **четное** число путей. В нашей же фигуре в каждой из точек A, B, C, D сходится как раз **нечетное** число линий. Поэтому начертить ее одним росчерком нельзя; невозможно, следовательно, и обойти Кенигсбергские мосты требуемым образом.

Семь задач

Попытайтесь нарисовать одним росчерком каждую из следующих семи фигур. Помните требования: начертить все линии заданной фигуры, не отрывая пера от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды ни одной линии.

Рис 3

Рис 4

Рис 5

Рис. 6

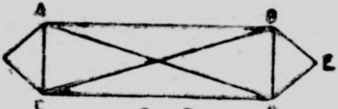


Рис 7

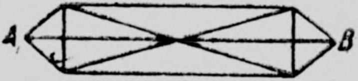


Рис. 8

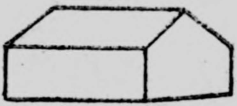


Рис. 9

Немного теории

Попытки вычерчивания непрерывной линией фигур 3—9 приводят к неодинаковым результатам. Некоторые фигуры удается вычерчивать, с какой бы точки ни начинать вести первую линию. Другие вычерчиваются одним росчерком в тех лишь случаях, когда начинают с определенных точек. Наконец, третьи вовсе не поддаются вычерчиванию одной непрерывной линией. Чем обусловлено подобное различие? Существуют ли признаки, позволяющие установить заранее, поддается ли данная фигура вырисовыванию одним росчерком и, если поддается, то с какой точки следует начинать черчение?

Теория дает на эти вопросы исчерпывающие ответы, и мы сейчас познакомимся с некоторыми положениями этой теории.

Условимся называть „четными" те точки фигуры, в которых сходится **четное** число линий, — в отличие от точек „нечетных", в которых встречается **нечетное** число линий.

Можно доказать (приводить доказательств не станем), что какова бы ни была фигура, нечетных точек в ней либо нет совсем, либо их имеется 2, 4, 6—вообще четное число.

Если нечетных точек в фигуре нет, то она всегда поддается вырисовыванию одним росчерком, безразлично, с какого места ни начинать черчение. Таковы фигуры 3 и 7.

Если в фигуре имеется только одна пара нечетных точек, то такую фигуру можно нарисовать одним росчерком, начав черчение в одной из нечетных точек (безразлично, в какой). Легко сообразить, что вычерчивание должно оканчиваться во второй нечетной точке. Таковы фиг. 4, 5, 8: в фигуре 8, например, вычерчивание надо начинать либо из точки *A*, либо из точки *B*.

Если фигура имеет более одной пары нечетных точек, то она вовсе не может быть нарисована одним росчерком. Таковы фигуры 6 и 9, содержащие по две пары нечетных точек.

Сказанного достаточно, чтобы безошибочно распознавать, какие фигуры нельзя нарисовать одним росчерком и какие можно, а также, с какой точки надо начинать вычерчивание. Проф. В. Аренс предлагает руководствоваться далее правилом: „Все уже начерченные линии заданной фигуры надо считать отсутствующими и при выборе очередной линии следить за тем, чтобы фигура сохранила цельность (не распалась), если эта линия также будет из'ята из чертежа".

Положим, например, что вычерчивание фиг. 7 начато по такому пути: *ABCD*. Если теперь провести линию *DA*, то останутся недочерченными две фигуры *ACF* и *BDE*, которые между собой **не связаны** (фигура 7 распалась). Тогда, закончив фигуру *AFC*, мы не сможем перейти к фигуре *BDE*, так как не будет недочерченных линий, их связывающих. Поэтому, пройдя путь *ABCD*, нельзя итти дальше по линии *DA*, а следует **сначала** обчертить путь *DBED*, и затем, по оставшейся линии *DA*, перейти к фигуре *AFC*.

Еще семь задач

Начертите одним росчерком следующие фигуры:

Рис 10

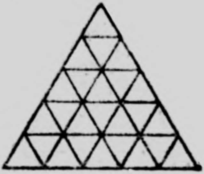


Рис 11

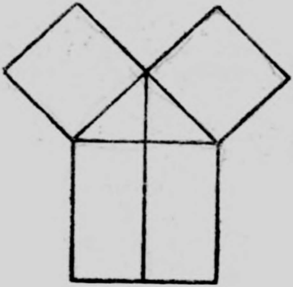


Рис. 12

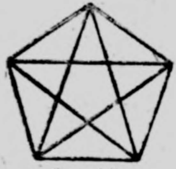


Рис. 13

Рис. 14

Рис 15

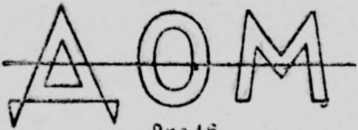
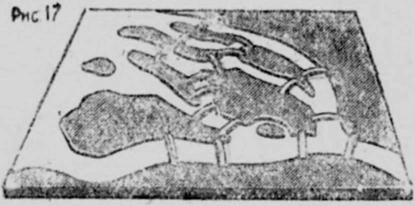


Рис 16

Мосты Ленинграда

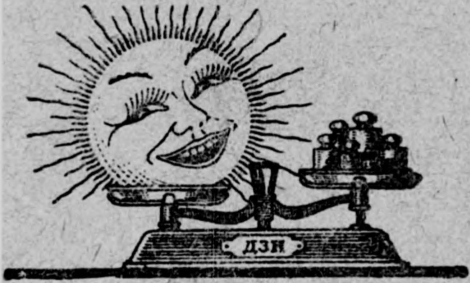
В заключение предлагаем задачу, составляющую сюжет одного из экспонатов математического зала Дома Занимательной Науки. Задача состоит в том, чтобы пройти по 17 мостам, соединяющим участки изображенной здесь территории Ленинграда, не побывав ни на одном мосту два раза. В отличие от Кенигсбергской задачи, требуемый обход на этот раз выполним, и наш читатель достаточно вооружен теперь теоретически, чтобы справиться с задачей самостоятельно.

Рис 17



ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 40 коп.



Сколько весит Солнце?

Какое расстояние до ближайшей звезды?

Как ученые „взвешивают" и измеряют" небесные тела?

На эти и многие другие интересные вопросы из различных областей знания Вы получите ответ в

ДОМЕ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

Фонтанка, 34

Открыт ежедневно от 11 до 19 часов

Впуск посетителей до 17 ч. 30 м.