ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

АЛГЕБРА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

ЛЕНИНГРАД 1940

ДОМ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ НАУКИ

АЛГЕБРА
НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Составил
Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЛЕНИНГРАД
1940

Эта книжечка предназначена для оживления самостоятельных и классных занятий по алгебре. В ней приведен графический материал, иллюстрирующий некоторые формулы алгебры, начиная с весьма простых и кончая довольно сложными. Все фигуры могут быть без чертежных инструментов воспроизведены на клетчатой бумаге. Благодаря подобным иллюстрациям, число которых читатели могут увеличить сами, отвлеченные алгебраические формулы становятся наглядными и лучше уясняются.

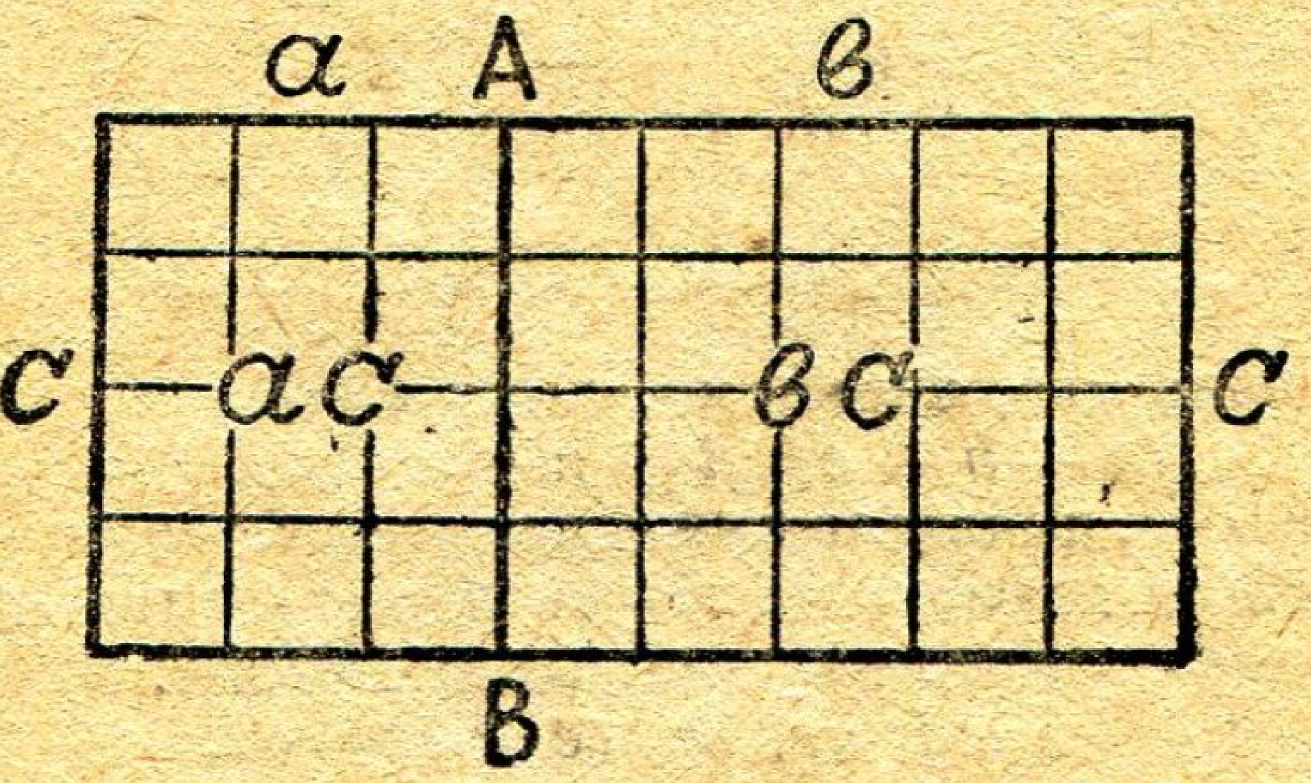
Книжечка рассчитана на читателя, знакомого с начатками алгебры.

$(a+в)c$

Начнем с весьма простого примера, который подготовляет к пониманию дальнейших: рассмотрим, как можно представить наглядно формулу

$$(a+b)c = ac+bc.$$

На клетчатой бумаге выделяем прямоугольник, высота которого состоит из c клеток, а основание — из $(a+b)$ клеток, и проводим прямую AB. Прямоугольник делится этой линией на два меньших: один — со сторонами a и c и площадью ac, другой — со сторонами b и c и площадью bc



Так как площадь большого прямоугольника равна $(a+b)c$, то из чертежа видно, что

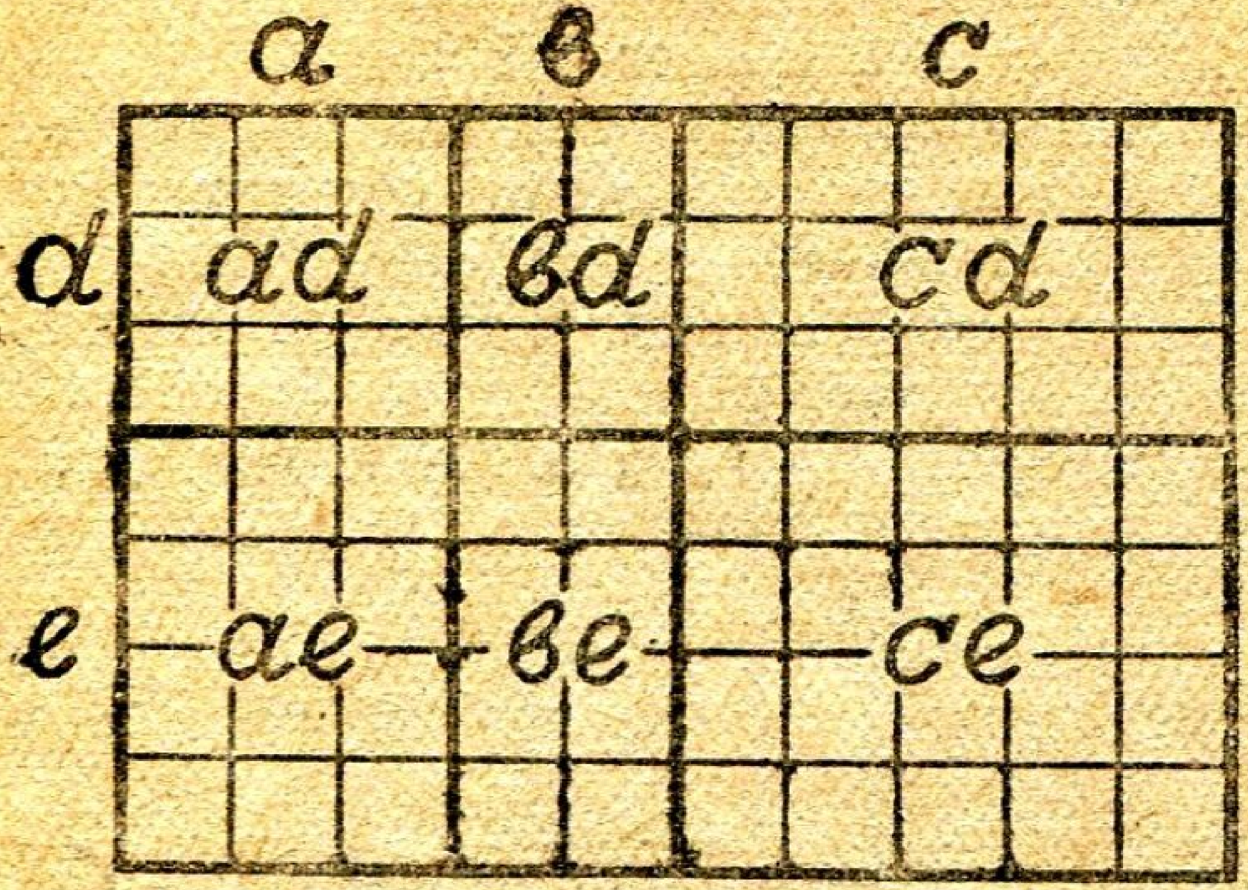
$$(a+b)c = ac+bc.$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа на клетчатой бумаге, чему равно

$(a+b+c)(d+e)$

Выделяем на клетчатой бумаге прямоугольник со сторонами из

$(a+b+c)$ и $(d+e)$ клеток.



Площадь его, очевидно, содержит

$(a+b+c)(d+e)$ клеток,

Прямыми, показанными на чертеже, прямоугольник делится на шесть прямоугольных участков, площади которых содержат:

ad, bd, cd, ae, be, ce клеточек.

Таким образом, из чертежа видно, что

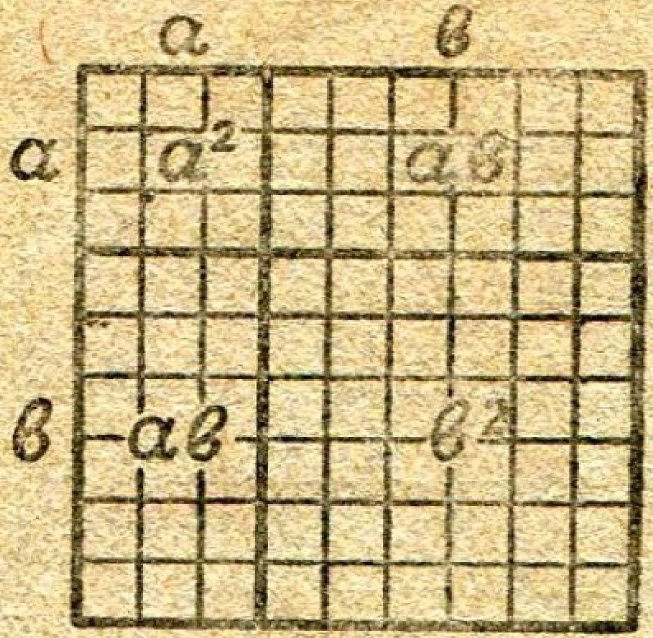
$$(a+b+c)(d+e)=ad+bd+cd+ae+$$
$$+be+ce.$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа, чему равно

$$(a+b+c)(d+e+f)$$

$(a+b)^2$

Выделяем на клетчатой бумаге квадрат со стороною из $(a+b)$ клеток.



Площадь его равна, очевидно,

$$(a+b)^2.$$

Прямые, проведенные на чертеже, делят квадрат на 4 участка; получаем:

квадрат со стороною a и площадью a^2;

квадрат со стороною b и площадью b^2;

два прямоугольника со сторонами a и b; площадь каждого $= ab$,

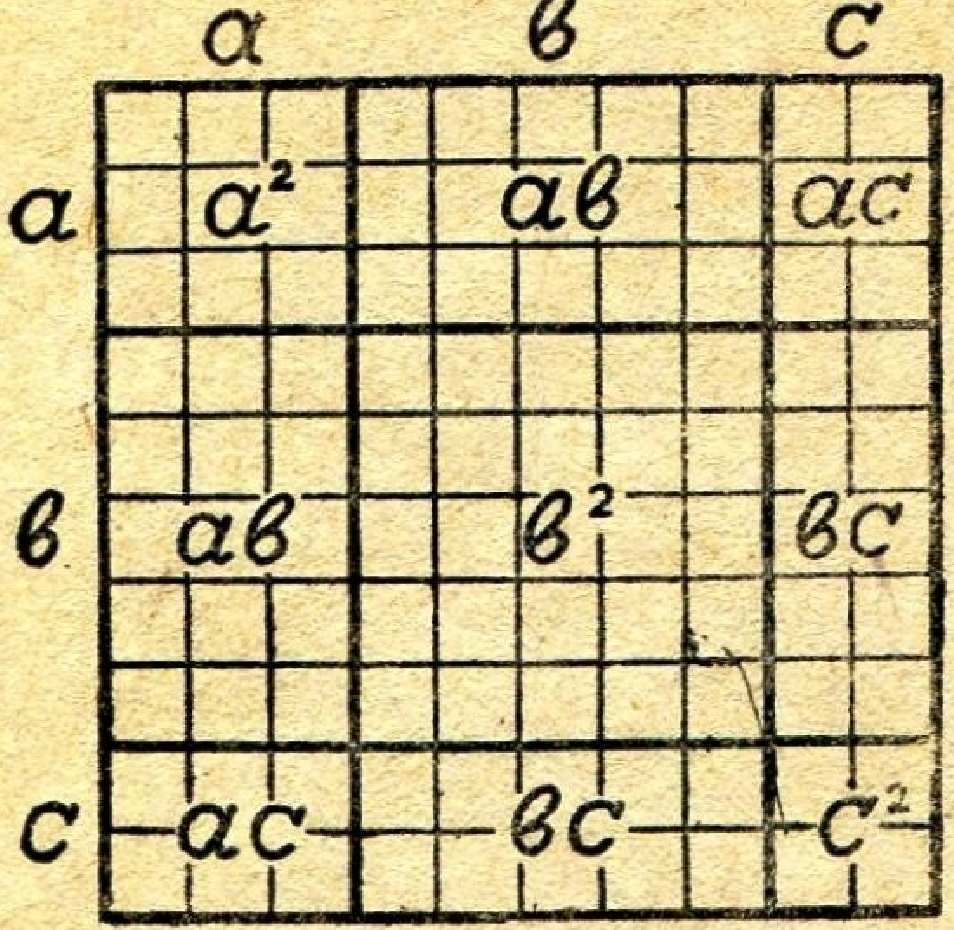
Так как площадь большого квадрата равна сумме площадей четырех перечисленных фигур, то из чертежа видно, что

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа, что если a составляет небольшую долю единицы, то $(1+a)^2$ приближенно равно $1+2a$

$(a+b+c)^2$

Чертим квадрат со стороною, равной сумме трех отрезков — a, b, c — и разграфляем его, как показано на чертеже.



Легко видеть, что площадь большого квадрата, равная $(a+b+c)^2$, составляется из 9 участков, площади которых:

$$a^2,\ ab,\ ac,\ ab,\ b^2,\ bc,\ ac,\ bc,\ c^2.$$

Имеем:

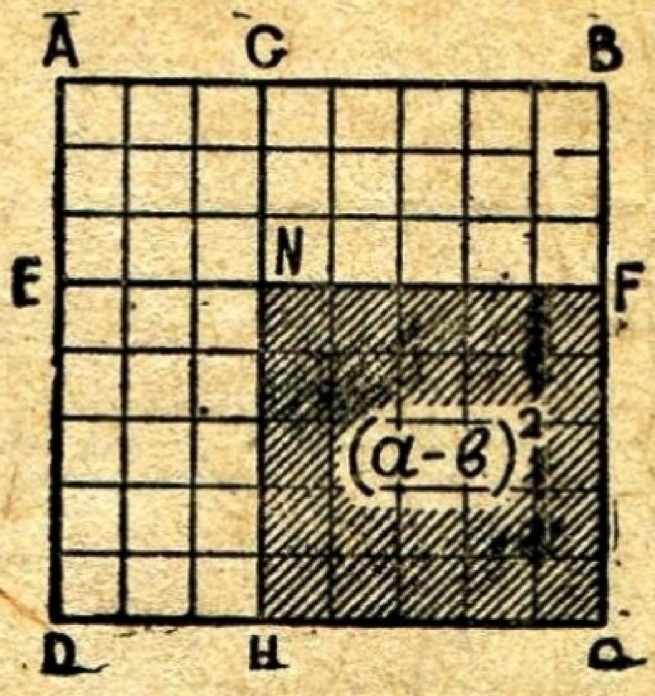
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + \\ + 2bc + 2ac.$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа, чему равно

$$(a+b+c+d)^2$$

$\boxed{(a-b)^2}$

Берем на клетчатой бумаге отрезок $AB = a$ и строим на нем квадрат $ABCD$. Откладываем $AG = b$ и выделяем квадрат $AGNE$.



Заштрихованный квадрат $NFCH$ имеет сторону, равную $(a-b)$ и, следовательно, площадь $(a-b)^2$. Эту площадь можно получить, если от квадрата $ABCD$ отнять прямоугольники $ABFE$, и $AGHD$ и придать участок $AGNE$, как отнятый дважды.

Имеем: пл. $NFCH$ = пл. $ABCD$ — пл. $ABFE$ — пл. $AGHD$ + пл. $AGNE$, или

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2.$$

Итак,

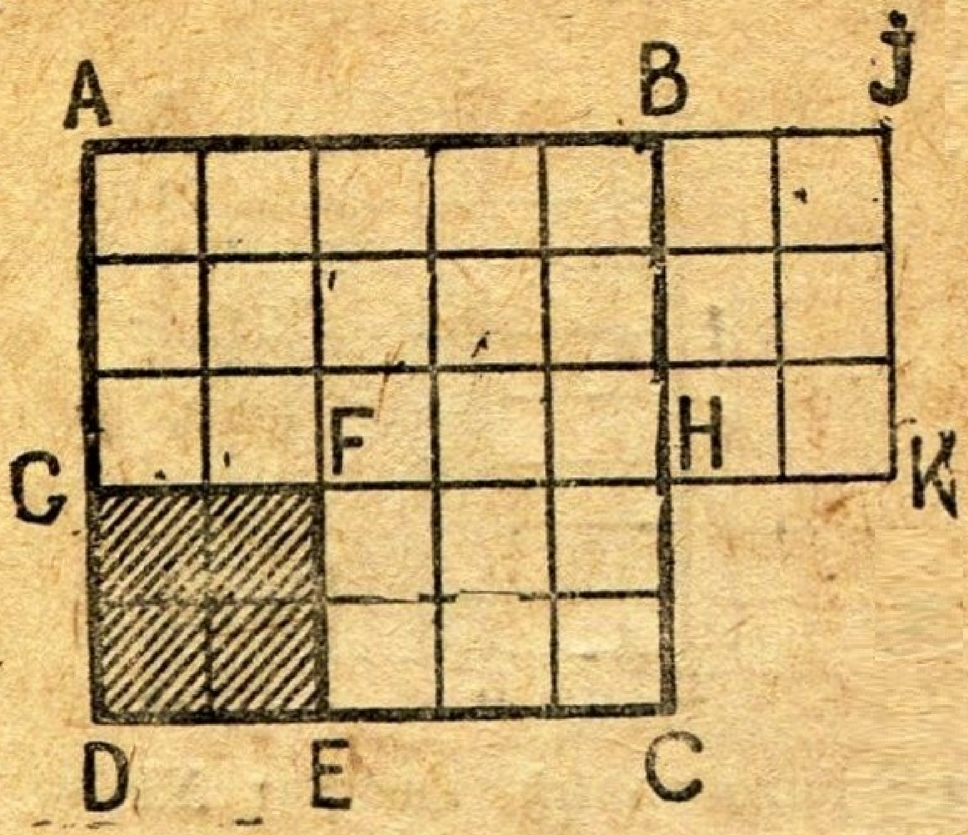
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа, чему равно

$$(a+b)\ (c-d)$$

$a^2 - b^2$

Чертим квадрат $ABCD$ со стороною a и выделяем в нем квадрат $GFED$ со стороною b.



Незаштрихованная часть большого квадрата по площади равна, очевидно, $a^2 - b^2$. Перенесем фигуру $FHCE$ в положение $BJKH$. Составится прямоугольник $AJKG$ со сторонами $(a+b)$ и $(a-b)$. Площадь его $(a+b)(a-b)$ должна равняться площади фигуры $ABCEFG$, т. е. $a^2 - b^2$. Следовательно,

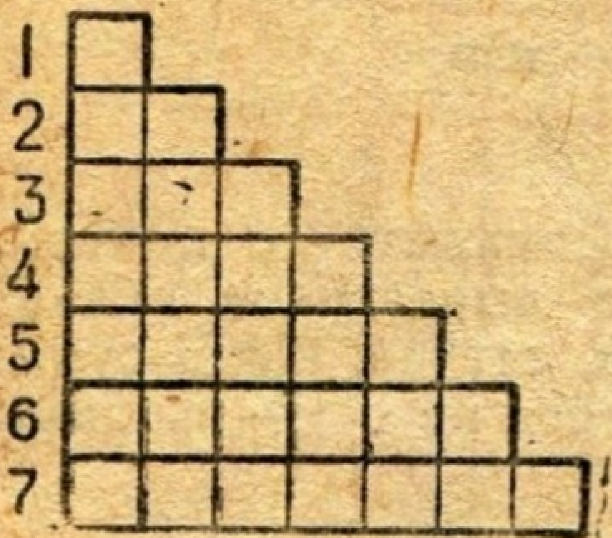
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Упражнение. Покажите с помощью чертежа, что

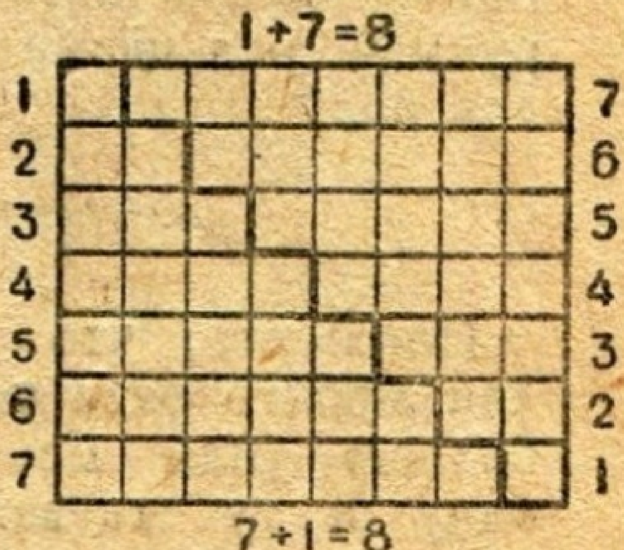
$$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$

Задача состоит в отыскании удобного способа складывать ряд последовательных чисел, начинающийся с 1. На клетчатой бумаге чертим изображенную здесь фигуру.



В полосках этой фигуры 1, 2, 3, 4 и т. д. клеток. Приложим к ней еще одну такую же фигуру, но в перевернутом положении.



Получился прямоугольник, в котором, очевидно, вдвое больше клеток, чем в одной лестничной фигуре. Число клеток в прямоугольнике найдем, умножив число клеток основания $(1 + 7)$ на число клеток высоты (7). Уменьшив результат вдвое, узнаем, сколько клеток в одной лестничной фигуре:

$$\frac{(1+7) \times 7}{2}$$

Отсюда вытекает способ быстрого суммирования ряда

$$1+2+3+4 \ldots + n:$$

надо сложить первое и последнее число, сумму умножить на число чисел ряда (n) и полученное разделить на 2; будем иметь:

$$\frac{(1+n)n}{2}$$

Упражнения. Покажите с помощью чертежа, что сейчас выведенное правило применимо и в том случае, когда суммируемый ряд начинается не с 1,—например, для ряда

$$5+6+7+8+9+10.$$

Покажите, что оно применимо вообще для любого ряда чисел, каждое из которых больше (или меньше) предыдущего на одну и ту же величину,—например для рядов:

$$7+10+13+16+19,$$

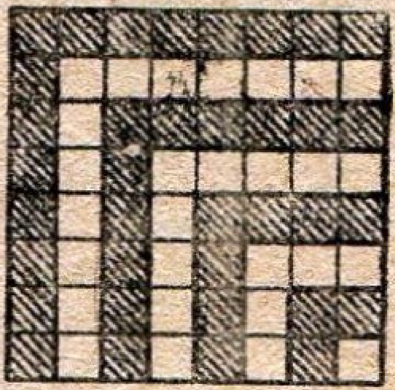
$$26+22+18+14+10.$$

(Такие ряды чисел называются арифметическими прогрессиями.

$$1+3+5+7+9=5^2$$

С помощью клетчатой бумаги можно, не пользуясь сейчас выведенным приемом, показать, что сумма последовательных нечетных чисел, начиная с 1, равна квадрату числа этих чисел. Выделим на бумаге квадрат и разделим его на участки, показанные на чертеже (они заштрихованы через один).

Число клеток в этих участках последовательно равно 1, 3, 5, 7 и т. д. Чертеж наглядно показывает, что одноклеточный и 3-клеточный участки вместе составляют квадрат из 2×2 клеток; одноклеточный, 3-клеточный и 5-клеточный вместе составляют квадрат из 3×3 клеток, и т. д. Значит,



$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2$$

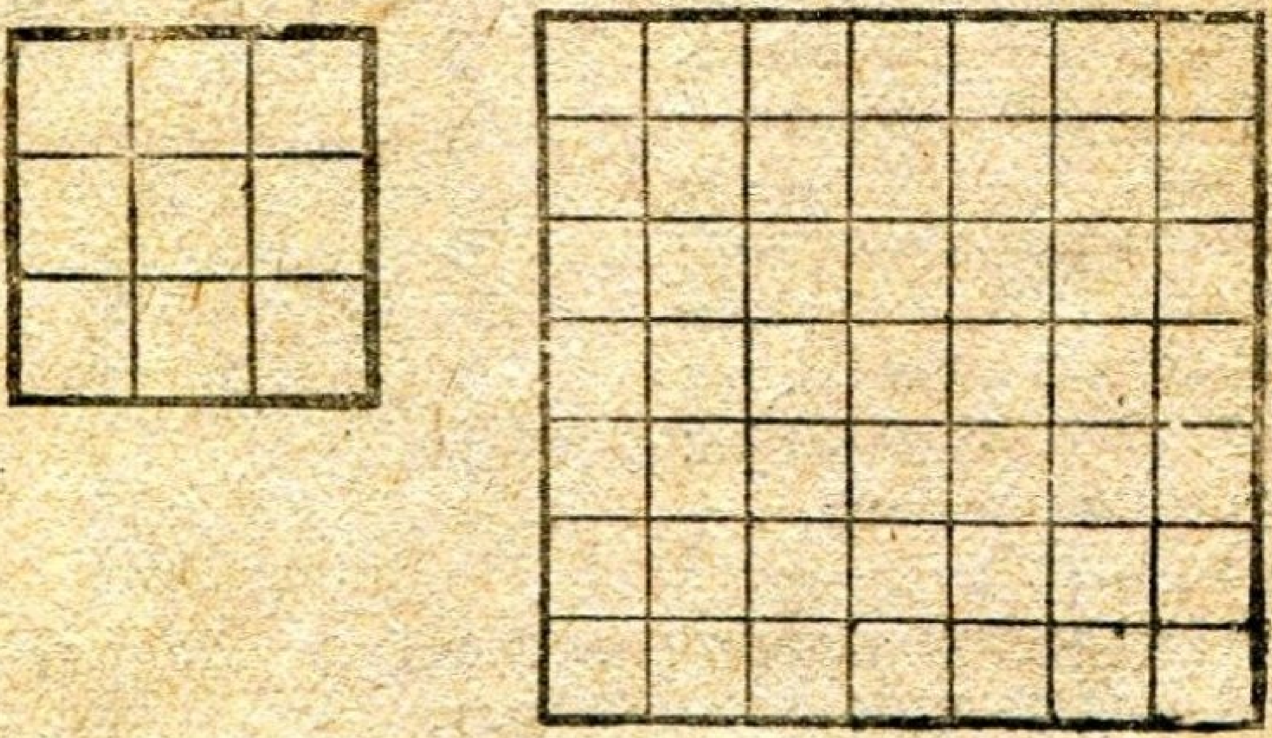
и т. д.

Соотношение это можно высказать и в иной форме: всякое число в квадрате равно сумме такого же числа первых нечетных чисел; например:

$$6^2=1+3+5+7+9+11$$

Еще два свойства квадратных чисел.

1. Пересчитаем клетки любого квадрата в диагональных направлениях.



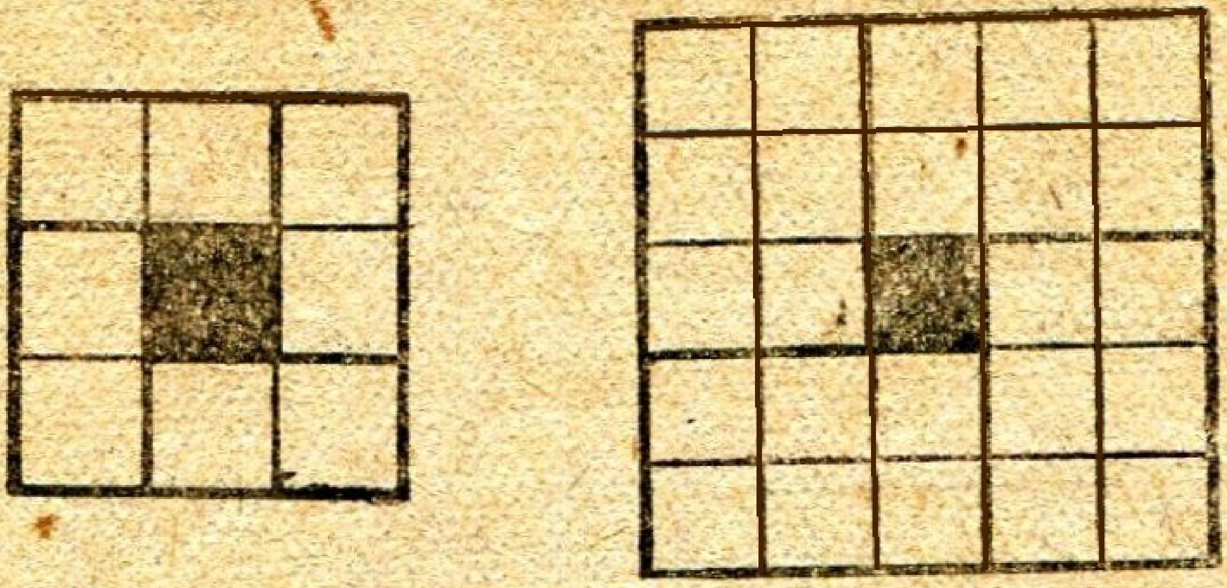
Легко заметить при этом любопытное свойство каждого квадратного числа, выраженное в равенствах:

$$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1,$$

$$7^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + \\ + 4 + 3 + 2 + 1 \quad \text{и т. п.}$$

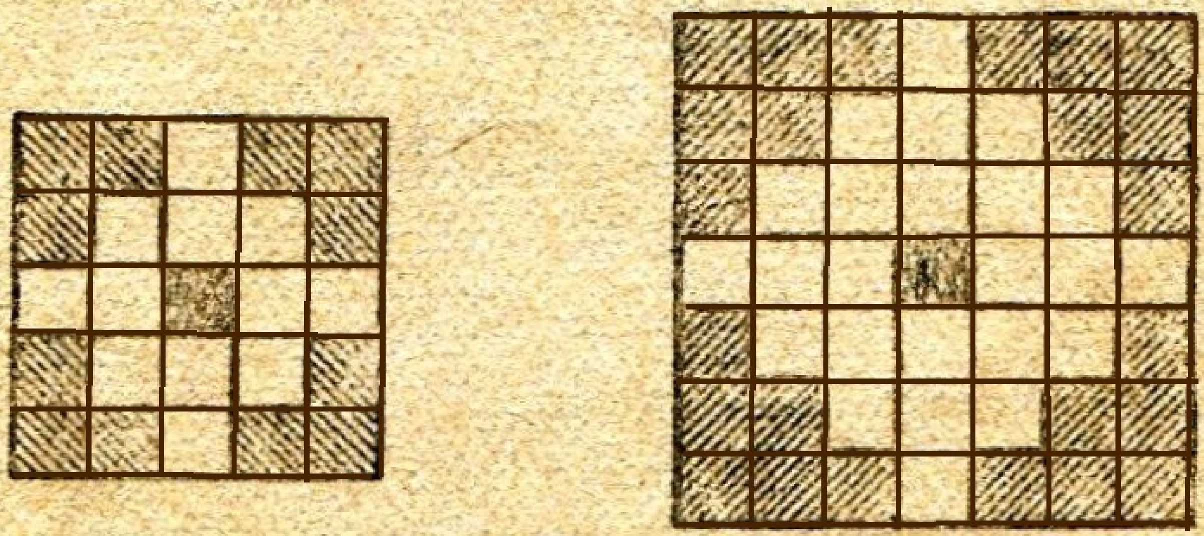
2. Квадрат всякого нечетного числа без 1 делится на 8.

Из фигур



ясно, что квадрат всякого нечетного числа без 1 делится на 4.

А из фигур



легко видеть, что те же числа без 1 делятся на 8.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \ldots\ldots$$

Покажем, как с помощью клетчатой бумаги вывести правило для быстрого суммирования кубов натурального ряда чисел.

Начертим квадрат из 10×10 клеток и заполним его числами, придав ему вид Пифагоровой таблицы умножения.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Разграфив квадрат, как здесь показано, определим суммы чисел в каждом участке отдельно. Найдем, что

в угловой клеточке — 1,

в примыкающем к нему участке

$$2 + 4 + 2 = 8,$$

в следующем соседнем —

$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27.$$

Складывать числа дальнейших участков утомительно; прибегнем поэтому к упрощенному приему. Для примера возьмем 5-й участок:

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5.$$

Разместим эти числа в две строки:

$$5 + 10 + 15 + 20 + 25$$

$$20 + 15 + 10 + 5.$$

Складывая эти числа столбцами, получаем:

$$25 + 25 + 25 + 25 + 25 = 5 \times 25 = 5^3.$$

Вообще сумма чисел любого участка равна кубу его порядкового числа: 6-го участка — 6^3, 7-го — 7^3 и т. д. А все участки вместе дают

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3.$$

Та же сумма должна, очевидно, получиться и при складывании чисел таблицы по строкам. Верхняя строка представляет сумму

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10.$$

Вторая строка, числа которой вдвое больше, должна дать удвоенную сумму — $2S$. Сумма чисел третьей строки — $3S$, четвертой $4S$, и т. д. Сумма всех 10 строк таблицы равна

$$S + 2S + 3S + \ldots 10S$$

или

$$S(1 + 2 + 3 + \ldots + 10)$$

или наконец $(1 + 2 + 3 + \ldots + 10)^2$ так как $S = (1 + 2 + 3 \ldots + 10)$. Но мы нашли уже раньше, что сумма всех чисел таблицы равна

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3.$$

Следовательно, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 =$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)^2.$$

И вообще сумма кубов чисел натурального ряда равна квадрату суммы этих чисел.

Отв. редактор *В. А. Камский*
Тех. редактор *А. Я. Барвиш*

Леноблгорлит № 2776
тип. „нов. печ.“, зак. 1398—10000

Цена 40 к.

Если эта книжка вас заинтересовала,

то посетите отдел математики

Дома Занимательной Науки

Ленинград, Фонтанка, 34

Вы найдете там

целую серию

математических

развлечений и загадок,—

в том числе:

12 = 13

Как вас зовут?

Автоматический отгадчик чисел.

Ханойские башни.

Как велик миллион

и др.
